

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXIII

No. 2

President: F. A. F. C. WENT
Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- A. A. NIJLAND: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen", p. 112.
(With one plate).
- F. A. H. SCHREINEMAKERS: "Membrane and Osmosis". VI, p. 119.
- W. J. DE HAAS and P. M. VAN ALPHEN: "The testing of monocrystalline wires", p. 128.
(With one plate).
- L. SCHUBNIKOW und W. J. DE HAAS: "Magnetische Widerstandsvergrößerung in Einkristallen von Wismut bei tiefen Temperaturen", p. 130.
- J. BÖESEKEN: "On the Difference of the Action of Peracids on Pyrogallol under the Influence of Peroxidase", p. 134.
- F. FLORSCHÜTZ: "Fossiele overblijfselen van een toendra-vegetatie in Nederland". (Voorloopige mededeeling). (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 137.
- A. J. PANNEKOEK: "Notice sur prolongement occidental dans le Jura français du décrochement de St. Cergue". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 139.
- M. J. VAN UVEN: "Adjustment of N Points (in n -dimensional space) to the best linear $(n-1)$ -dimensional space". I. (Communicated by Prof. A. A. NIJLAND), p. 143.
- J. G. RUTGERS: "Over een bepaalde integraal met Besselsche functies". (Communicated by Prof. JAN DE VRIES), p. 158.
- H. HULSHOF: "Quellungsdruck und Osmotischer Druck". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN), p. 165.
- G. F. C. GRISS: "Differentialinvarianten von zwei kovarianten Vektoren in vier Veränderlichen". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 176.
- C. A. G. WIERSMA: "Der Einfluss der Narkose mit Cyankalium auf den Nerven. Beitrag zur Frage der Dekrementleitung im Nerven". (Vorläufiger Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 180.
- J. A. SCHOUTEN: "Die Darstellung der Lorentzgruppe in der komplexen E_2 abgeleitet aus den Diracschen Zahlen". (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS), p. 189.
- T. L. DE BRUIN: "On the structure of the spectrum of ionized Argon (Ar. II)". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN), p. 198.

Astronomy. — *Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen*
Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Die im Herbst d. J. 1904 an der Sternwarte Utrecht angefangenen Beobachtungen von langperiodischen veränderlichen Sternen (mit Inbegriff der eher als unregelmässig zu bezeichnende Sterne *W Cygni*, *η Geminorum* und *S Persei* 44 Stück) sind regelmässig bis zum heutigen Tage fortgesetzt worden. Ausser den durch die Jahreszeit oder durch die Sichtbarkeitsgrenze des Instruments *R* bedingten Zeitintervallen, in denen der betreffende Stern nicht beobachtet werden konnte, kommen keine grösseren Lücken in den Beobachtungsreihen als von etwa einer Monat vor. Bis jetzt liegen rund 29.000 Schätzungen vor, über die in den *Astr. Nachr.* regelmässig in aller Kürze berichtet wurde (das letzte Mal in Nr. 5632).

Ueber die Methode des Schätzens — eine leichte Modifikation des ARGELANDERSchen Stufenverfahrens —, die benutzten Instrumente, die Wahl der Vergleichsterne, die Reduktion der Beobachtungen u.s.w. berichtete ich ausführlich in *Rech. Utr.* VIII, 1. Ich möchte insbesondere auf Nr. 6—11 (S. 11—23) verweisen. Es kamen bei den hier zu besprechenden Sternen beinahe immer zwei Instrumente (der Zehnzöller *R*, Vergrösserung 94, Fokallänge 319 cm, und der dreizöllige Sucher *S*, Vergrösserung 22, Fokallänge 113 cm, oder aber *S* und ein umkehrendes Binokel *B*, Vergrösserung 4) zur Verwendung, mitunter (*χ Cygni*, *Mira Ceti*) sogar drei. Glücklicherweise lagen immer in genügender Zahl gleichzeitig in zwei Instrumenten angestellte Beobachtungen vor, welche eine Reduktion von *R* oder (und) *B* auf *S* ermöglichten. Da das PURKINJESche Phänomen bei mir eine bedeutende Rolle spielt, so ist diese Reduktion, sogar bei weniger stark gefärbten Sternen, keineswegs zu vernachlässigen. Die Farbe wurde in den ersten Jahren sehr häufig geschätzt, später nur gelegentlich; es bedeutet 0^c rein weiss, 3^c gelb, 6^c orange und 10^c rot.

Selbstverständlich wurde die Stufenskala nach den Angaben von *Rech.* IX, S. 15 korrigiert; bei den hier oft vorkommenden Amplituden von 6 Grössenklassen können in der Mitte der Skala leicht Korrekturen von 0^m.2 auftreten.

Es war von Anfang an der Hauptzweck, ein möglichst ausgedehntes einheitliches Material zu sammeln, und die Beobachtungen werden hoffentlich noch mehrere Jahre fortgesetzt werden können. Aus naheliegenden

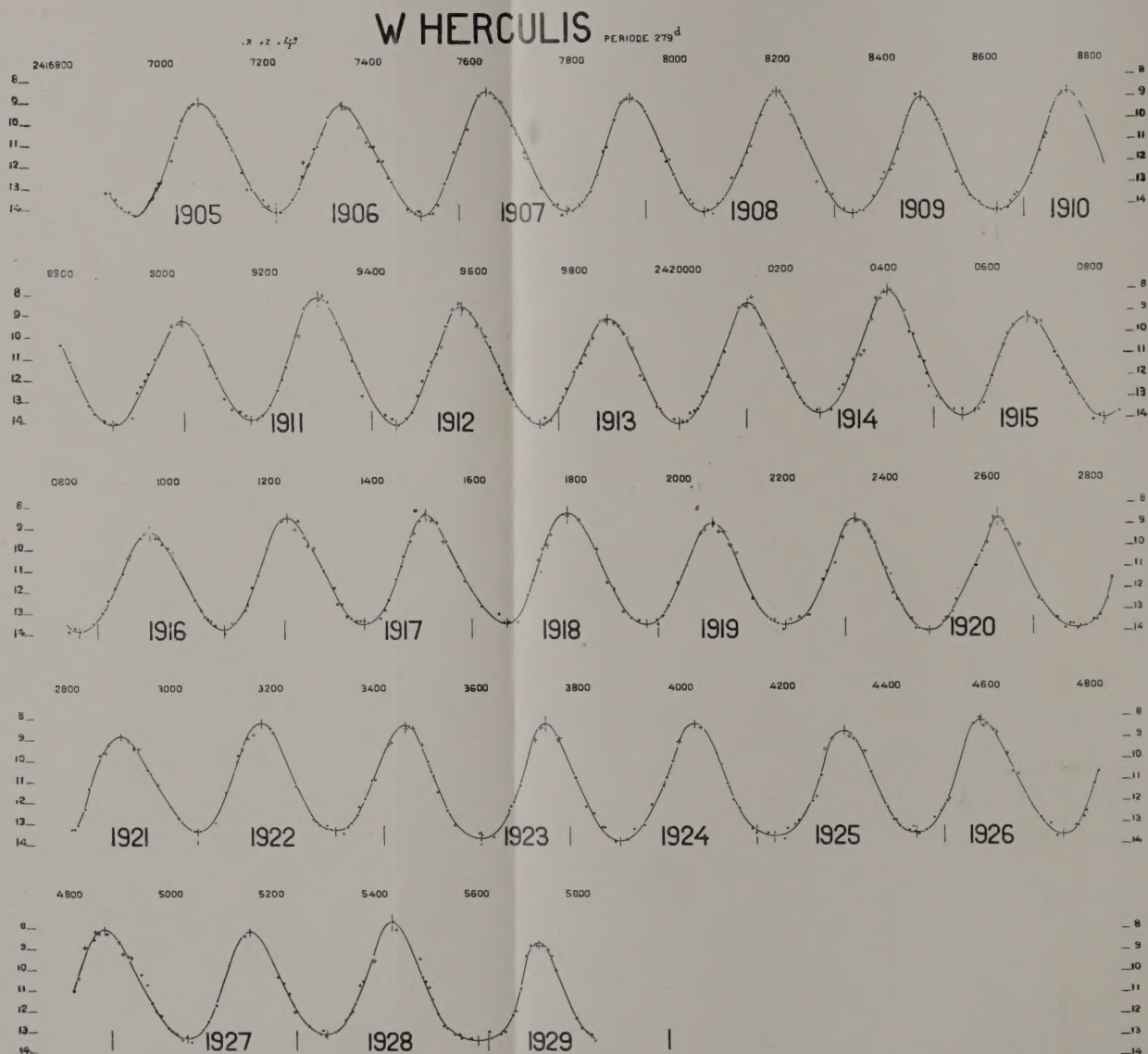


Fig. 1.

Gründen kann ich es aber nicht darauf ankommen lassen, die Abschliessung der Beobachtungsreihen abzuwarten. Jetzt, da 25 Jahre vorliegen, dürfte es wohl nicht zu gewagt sein, eine mittlere Kurve abzuleiten, die ein Bild des normalen Lichtwechsels zu geben im Stande ist, und die Unregelmässigkeiten, welche dieses Bild entstellen, als solche zu erkennen und zu diskutieren. Ueber die beim Zeichnen der mittleren Kurve befolgte Methode werde ich bei jedem Stern das Nötige mitteilen.

Die Lichtkurve (Fig. 1) wurde nach Augenmass gezogen, in der Hoffnung, dass die Abweichungen δ (Beobachtung minus Kurve) den Bedingungen :

- a $\Sigma \delta = 0$,
- b gleichviel Plus- wie Minuszeichen,
- c gleichviel Zeichenwechsel wie Zeichenfolgen,

Genüge leisten möchten.

Die photometrischen Helligkeiten der Vergleichsterne wurden verschiedenen Quellen entnommen, natürlich allererst den *Harvard Annals* (29, 37 und 74) ; für die Helligkeiten 7^m.5 konnte ich auch die Angaben des *Potsdamer Generalkataloges* benutzen, welche auf das System der *Harvard Photometry* reduziert wurden. Auch stimmten fast immer die Sichtbarkeitsgrenzen der beiden Instrumente R und S mit (14^m.25, bzw. 11^m.60, s. *Astr. Nachr.* Nr. 4911). „Adopted magnitudes“ kamen niemals zur Verwendung. Die endgültig angenommenen Helligkeiten *H* der Vergleichsterne wurden aus sämtlichen Daten auf graphischen Wege ermittelt. Das Spektrum wurde dem *Draper Catalogue* entnommen.

I. Die mittlere Lichtkurve von *W Herculis*.

Instrumente R und S.

Gesamtzahl der hier zu besprechenden Beobachtungen : 674 (von 2416888 bis 2425878).

Karte : HAGEN, *Atlas Stell. var.* Series III (s. auch die *Aggiunte, Spec. Astr. Vat.* XII).

Die Stufenskala bezieht sich auf die Helligkeit 11^m.0 ; der Stufenwert ist 0^m.113.

Die BD-Numerierung in *Harv. Ann.* 29 (S. 157) ist fehlerhaft, wenigstens für die Sterne Q, Y und Z : + 37° 2771 ist der Veränderliche, und Y und Z, deren photometrische Helligkeiten als 10^m.82 und 11^m.01 gegeben werden, können unmöglich + 37° 2775 und 2770 sein. Ich habe leider auch die Sterne e, f, j, k, m und n von PARKHURST nicht identifizieren können. Für Stern g wurde von MITCHELL die photometrische Helligkeit 11^m.49 gegeben (*Memoirs Amer. Ac.* 14, S. 288). Dieser Stern wurde sechsmal an die Sichtbarkeitsgrenze von S, Stern m zwölfmal an die Grenze von R angeschlossen. Zur Erzielung eines besseren Anschlusses an das System der *Harvard Photometry* wurden öfters die PICKERINGSchen Sterne b, c, d, e, f, o, p und r mit beobachtet.

Die Farbe wurde zu 1^c.7 bestimmt ; es liegen 56 Schätzungen vor, welche aber für zwei Drittel aus den Jahren 1904 bis 1910 stammen. Die Reduktion $S - R$ beträgt + 0^m.12. Spektrum : M 3 e (*Harvard Annals* 79 S. 175).

VERGLEICHSTERNE

	B D	Sp.	Hagen	St.	HA 37	HA 29	HA 74	Grenze	H
<i>a</i>	+ 37.2778 ^o	K 5	1	54.5	<i>a</i> 7.77 ^m	7.62 ^m	—	—	7.77 ^m
—	38.2787	G 0	—	51.5	<i>b</i> 8.05	—	—	—	[8.11]
—	37.2774	G 0	2	49.5	<i>c</i> 8.33	8.33	—	—	[8.33]
—	37.2772	G 5	4	47.8	<i>d</i> 8.60	8.66	—	—	[8.54]
<i>b</i>	37.2784	K 0	3	47.5	—	—	—	—	8.57
—	37.2788	G 5	—	45.4	<i>e</i> 8.80	8.80	—	—	[8.81]
—	37.2777	—	7	43.2	<i>f</i> 9.02	9.20	9.04 ^m	—	[9.06]
<i>c</i>	37.2782	—	6	41.9	<i>g</i> 9.07	—	—	—	9.20
<i>d</i>	37.2775	—	9	36.6	<i>h</i> 9.63	—	—	—	9.81
<i>e</i>	37.2767	—	15	32.3	—	—	—	—	10.29
<i>f</i>	—	—	18	26.9	<i>m</i> 10.75	10.82	—	—	10.90
<i>g</i>	—	—	19	23.0	<i>n</i> 11.07	—	11.46	11.28 ^m	11.35
—	—	—	22	18.8	<i>o</i> 11.74	—	11.90	—	[11.82]
<i>h</i>	—	—	23	16.7	—	—	—	—	12.06
—	—	—	24	16.0	<i>p</i> 11.99	—	12.16	—	[12.14]
<i>k</i>	—	—	28	13.1	<i>q</i> 12.30	—	—	—	12.47
—	—	—	—	10.0	<i>r</i> 12.92	—	—	—	[12.82]
<i>l</i>	—	—	32	6.4	<i>s</i> 13.34	—	—	—	13.21
<i>m</i>	—	—	41	0.0	<i>w</i> 14.00	13.47	—	13.88	13.95

Die Reihe der Abweichungen δ (Beobachtung minus Kurve ; s. Fig. 1) zeigt 226 Plus-, 254 Minuszeichen, 194 Nullwerte, 237 Zeichenwechsel, 242 Zeichenfolgen. Das Mittel der absoluten Werte beträgt 0^m.115, oder fast genau eine Stufe.

Ein Einfluss des Mondscheines ist nicht bemerkbar. Es verteilen sich auf 199 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt : 63 Pluszeichen, 60 Minuszeichen, 76 Nullwerte.

Hier folgt die Tabelle der aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima *m* und der Maxima *M* :

Einfache Elemente wie 2421115^d + 279^d *E* (für die Minima) und

MINIMA <i>m</i>						MAXIMA <i>m</i>				
<i>E</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>
- 15	—	—	—	—	—	²⁴¹ 7072	^m 8.3	7060	+ 12	+ 5
- 14	²⁴¹ 7222	^m 13.5	7209	+ 13	+ 2	7350	8.5	7339	+ 11	0
- 13	7502	13.7	7488	+ 14	- 1	7630	7.8	7618	+ 12	- 1
- 12	7788	13.5	7767	+ 21	+ 5	7911	8.2	7897	+ 14	- 2
- 11	8054	13.6	8046	+ 8	- 8	8196	7.9	8176	+ 20	+ 3
- 10	8342	13.7	8325	+ 17	+ 1	8474	8.2	8455	+ 19	+ 1
- 9	8620	13.6	8604	+ 16	+ 1	8754	8.0	8734	+ 20	+ 2
- 8	8898	13.7	8883	+ 15	+ 1	9034	8.7	9013	+ 21	+ 4
- 7	9167	13.4	9162	+ 5	- 6	9300	7.6	9292	+ 8	- 7
- 6	9450	13.7	9441	+ 9	- 1	9578	8.1	9571	+ 7	- 5
- 5	9732	13.7	9720	+ 12	+ 5	9864	8.7	9850	+ 14	+ 5
- 4	²⁴² 0002	13.7	9999	+ 3	- 1	²⁴² 0136	8.0	²⁴² 0129	+ 7	+ 2
- 3	0276	13.2	²⁴² 0278	- 2	- 3	0407	7.4	0408	- 1	- 2
- 2	0553	13.4	0557	- 4	- 2	0679	8.7	0687	- 8	- 5
- 1	0837	13.5	0836	+ 1	+ 6	0967	8.8	0966	+ 1	+ 8
0	1110	13.5	1115	- 5	+ 3	1235	8.2	1245	- 10	+ 1
+ 1	1384	13.3	1394	- 10	0	1506	8.0	1524	- 18	- 3
+ 2	1664	13.3	1673	- 9	+ 4	1783	8.0	1803	- 20	- 3
+ 3	1937	13.3	1952	- 15	0	2066	8.5	2082	- 16	+ 3
+ 4	2208	13.4	2231	- 23	- 6	2342	8.3	2361	- 19	+ 1
+ 5	2488	13.7	2510	- 22	- 5	2610	8.3	2640	- 30	- 10
+ 6	2774	13.6	2789	- 15	+ 3	2905	8.7	2919	- 14	+ 5
+ 7	3055	13.3	3068	- 13	+ 5	3181	8.1	3198	- 17	+ 1
+ 8	3325	13.2	3347	- 22	- 6	3462	8.2	3477	- 15	+ 1
+ 9	3610	13.7	3626	- 16	- 1	3738	8.2	3756	- 18	- 6
+ 10	3884	13.8	3905	- 21	- 9	4029	8.2	4035	- 6	+ 3
+ 11	4185	13.6	4184	+ 1	+ 10	4322	8.5	4314	+ 8	+ 13
+ 12	4462	13.4	4463	- 1	+ 3	4586	8.0	4593	- 7	- 5
+ 13	4746	13.5	4742	+ 4	+ 2	4869	8.1	4872	- 3	- 5
+ 14	5030	13.4	5021	+ 9	+ 3	5155	8.2	5151	+ 4	- 2
+ 15	5305	13.2	5300	+ 5	- 8	5434	7.7	5430	+ 4	- 4
+ 16	5601	13.5	5579	+ 22	+ 3	5724	8.7	5709	+ 15	+ 4
		13.50					8.21			

$2421245^d + 279^d E$ (für die Maxima) können offenbar die beobachteten Epochen B keineswegs darstellen. Die übrigbleibenden $B - R$ sind sehr gross und zeigen ausserdem einen ausgesprochenen systematischen Charakter. Die Hinzufügung der periodischen Glieder

$$- 18^d \sin 12^\circ (E + 3) \text{ für die Minima,}$$

$$- 18^d \sin 12^\circ (E + 2) \text{ für die Maxima,}$$

welche auf graphischem Wege ermittelt wurden, und fast genau identisch ausfallen, drückt die Qudratsummen von 5547 und 6421 auf 924, bzw. 859 herab. Eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab die Elemente :

$$\begin{array}{lcl} \text{Minima:} & 2421116^d.3 + 280^d.2 E - 26^d \sin (8^\circ.4 E + 10^\circ.9), \\ & \pm \quad 1.3 \quad 0.48 \quad 3.6 \quad 1.6 \quad 3.6 \text{ (m.F.)}; \\ \text{Maxima:} & 2421243^d.3 + 278^d.7 E - 16 \sin (13^\circ.2 E + 34^\circ.2), \\ & \pm \quad 1.3 + \quad 0.49 \quad 3.7 \quad 1.7 \quad 3.7 \text{ (m.F.)}, \end{array}$$

welche aber die Abweichungen $B - R$ nicht wesentlich besser als die so viel einfacheren oben zitierten Formeln darstellen; die Qudratsummen werden jetzt 667, bzw. 708.

Aus den ziemlich grossen Werten der mittleren Fehler folgt übrigens, dass eine Verschiedenheit der Gesetze, welche die Epochen der Maxima und der Minima bestimmen, durchaus nicht feststeht.

Ich gebe einer Formel, welche für Maxima und Minima einen identischen Periodenwert, und ein identisches periodisches Glied hat, den Vorzug. Die Elemente lauten dann :

$$\begin{array}{l} \text{Minima: } 2421116^d.3 \} \\ \text{Maxima: } 1243.3 \} + 279.4 E - 21^d \sin (10^\circ.8 E + 22^\circ.5). \end{array}$$

$$\text{Es wird dann } \frac{M-m}{P} = 0.454.$$

Zu bemerken ist, dass der PRAGERSche Katalog für 1930 den Periodenwert 282.4 hat, und dass aus sämtlichen, von mir seit d. J. 1905 in den *Astr. Nachr.* mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima als allgemeines Mittel der Wert 278.7 hervorgeht.

Die extremen Werte des Lichtwechsels sind :

$$\begin{array}{l} \text{Minimum: } v = 13^m.50 \pm 0^m.033, \} \\ \text{Maximum: } v = 8^m.21 \pm 0^m.060. \} \text{ (m F.)} \end{array}$$

Beim Maximum scheinen die Abweichungen vom Mittelwerte 8.21 völlig regellos aufzutreten; beim Minimum besteht eine sehr schwache Andeutung eines Sinusgliedes. Ueberhaupt liegt das minimale Licht viel fester als das maximale, und auch bei diesem ziemlich regelmässigen langperiodischen Veränderlichen scheint das Minimum eher als das stärker schwankende Maximum als der normale Zustand aufzufassen zu sein; man wird das Maximum als eine Aufhellung, nicht aber das Minimum als eine Verfin-

sterung betrachten müssen. Bei weniger regelmässigen Sternen (*T Cassiopeiae* z.B.) wird diese Tatsache viel deutlicher an den Tag treten, so weit sich das Material schon jetzt überblicken lässt.

Zur Herleitung einer mittleren Kurve wurden in der Nähe der Maxima für die Phasen

$$-70^d, -60^d, \dots\dots\dots +60^d, +70^d$$

die Helligkeitsunterschiede gegen das grösste Licht bestimmt und je zu einem Mittel vereinigt. So auch für die Minima. Wie aus der Fig. 2 ersicht-

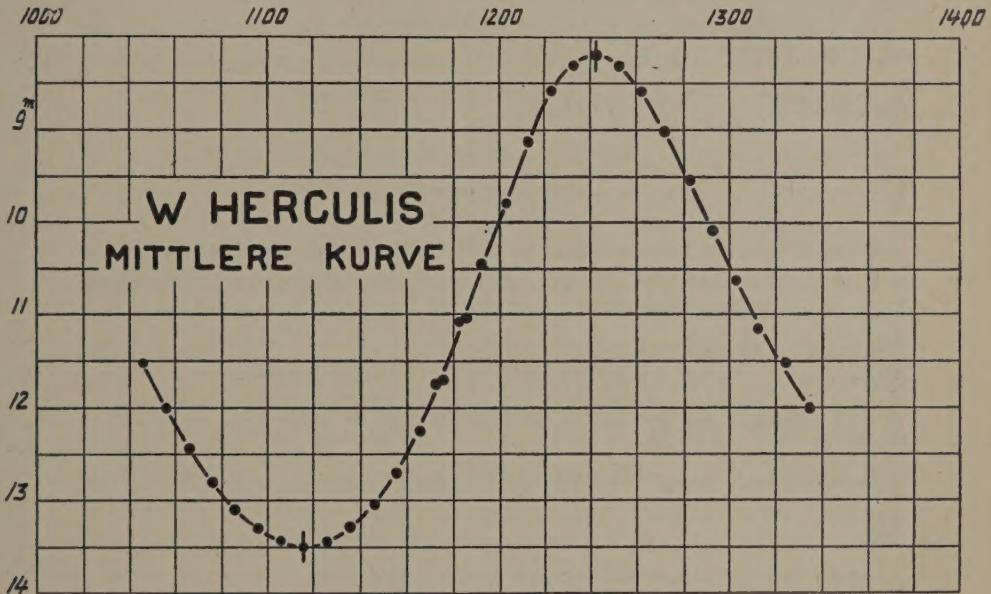


Fig. 2.

lich, schliessen die beiden Teilkurven vorzüglich an einander an; sie konnten sehr leicht zu einer „mittleren Kurve“ kombiniert werden, die nun den folgenden Verlauf hat:

Phase	v	Phase	v	Phase	v	Phase	v	Phase	v
-70^d	11.59^m	-10^d	13.44^m	$+50^d$	12.25^m	$+110^d$	8.49^m	$+170^d$	9.71^m
-60	12.02	0	13.50	$+60$	11.65	$+120$	8.25	$+180$	10.25
-50	12.44	$+10$	13.45	$+70$	10.96	$+130$	8.22	$+190$	10.75
-40	12.81	$+20$	13.29	$+80$	10.28	$+140$	8.34	$+200$	11.20
-30	13.11	$+30$	13.06	$+90$	9.60	$+150$	8.71	$+210$	11.64
-20	13.30	$+40$	12.71	$+100$	8.96	$+160$	9.15		

Die Streuung wächst natürlich stark mit der Entfernung vom Maximum (bezw. Minimum) ; in der Nähe von $\pm 70^d$ erreicht sie die Werte :

	m	M	Mittel
im aufsteigenden Aste	0.295	0.296	0.295
im absteigenden Aste	0.243	0.276	0.260
Mittel	0.269	0.286	

Die Streuung ist also grösser beim Maximum und grösser im aufsteigenden Aste, wie das übrigens auch nicht anders zu erwarten war.

Im Verhältnis 0.113 der Streuungen $0^m.295$ und $0^m.260$ findet man das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Lichtwechsels zurück, das für Auf- und Abstieg $\frac{0.149}{0.130} = 0.115$ beträgt.

Zusammenfassung.

Aus 674, in den Jahren 1904 bis 1929 (2416888 bis 2425878) angestellten, Beobachtungen von *W Herculis* sind die folgenden Elemente des Lichtwechsels abgeleitet worden :

$$\begin{array}{l} \text{Minimum: } 2421116^d.3 \\ \text{Maximum: } 1243.3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Minimum: } 2421116^d.3 \\ \text{Maximum: } 1243.3 \end{array}} \right\} + 279.4E - 21^d \sin(10^\circ.8E + 22^\circ.5); \quad \begin{array}{l} v=13^m.50, \\ v= 8.21, \end{array}$$

woraus $\frac{M-m}{P} = 0.454.$

Die mittlere Lichtkurve (s. Fig. 2) hat einen vollkommen glatten Verlauf.

Utrecht, Februar 1930.

Chemistry. — *Membrane and Osmosis*. VI. By F. A. H. SCHREINEMAKERS

(Communicated at the meeting of February 22, 1930.)

Homogeneous, complex and heterogeneous membranes.

In deducing the phenomena, which may occur with the osmosis, we have up till now assumed tacitly that the membrane is homogeneous, namely that it has the same properties everywhere (nature, absorptionpower, etc.). We can also compose a membrane, however, by placing two or more homogeneous membranes of different properties, one against the other and uniting them to a complex; we shall call a similar complex a "membrane $C.M(W)$ " or a "membrane $C.M(n)$ ". If e.g. a complex contains five membranes, we may represent it by:

$$|M_1|M_2|M_3|M_4|M_5| \dots \dots \dots (1)$$

In nature heterogeneous membranes do occur, viz. membranes, having different properties in all intersections; we call them a "membrane $Ht.M(W)$ " or a "membrane $Ht.M(n)$ ". If in (1) we imagine the number of membranes infinitely large and each of them extremely thin, then (1) passes into a heterogeneous membrane.

If we go through a membrane from one of its boundary planes towards the other and pay attention to its properties, we have:

in a homogeneous membrane the properties do not change;

in a complex membrane the properties change by leaps and bounds, namely in each place, where two membranes meet;

in a heterogeneous membrane the properties change continuously.

So the complex membrane forms a transition between the homogeneous and the heterogeneous membranes; we are able to deduce the properties of the heterogeneous membrane with the aid of those of the complex membrane.

For the osmotic system:

$$L|M(W)|L' \dots \dots \dots (2)$$

obtains, as we have seen previously:

A. through all membranes $M(W)$ the water diffuses in the same direction; we have called this direction the congruent one.

So the nature of the membrane can indeed influence the velocity of the W -diffusion, but not the direction.

In the same way as we have formerly deduced A , we can now show also that this obtains also for the membranes $C.M(W)$ and the membranes $Ht.M(W)$.

The direction in which the water diffuses in system (2), has been determined as we saw before, by :

B_1 . when both liquids have the same O.W.A., no water diffuses through a membrane $M(W)$; when both liquids have a different O.W.A., the water diffuses towards the liquid with the greater O.W.A.

B_2 . when both liquids give the same W -amount to a membrane $M(W)$, then no water diffuses ; when both liquids give a different W -amount to the membrane, the water will diffuse towards the liquid giving the smaller W -amount.

In a similar way as previously we now find that B_1 and B_2 obtain also for complex and heterogeneous membranes. As, however, the water absorbed has not been divided homogeneously in these membranes, we have for the application of B_2 to take the W -amount of these membranes to mean the average or also the total W -amount of the membrane. It appears namely from the deduction of B_2 with the aid of the "sluice current" that only the total W -amount of the membrane plays a part here and that it does not matter in what way the water has been distributed in the membrane. We shall refer to this later on.

Formerly we have expressed B_1 and B_2 in still an other way, namely :

C_1 . when the two boundary planes of a membrane $M(W)$ have the same O.W.A., then no water diffuses ; when both boundary planes have a different O.W.A., the water will diffuse towards the boundary plane with the greater O.W.A.

C_2 . when the two boundary planes of a membrane $M(W)$ have the same W -amount, no water diffuses ; when both boundary planes have a different W -amount, the water will diffuse towards the boundary plane with the smaller W -amount.

What has been expressed in C_1 obtains not only for system (2) but also for a system :

$$L | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 | L' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

with a membrane $C.M(W)$ and for systems with a membrane $Ht.M(W)$.

If e.g. we bring the membrane of system (3) into the liquid L , then each of its parts M_1, M_2 etc. and consequently also the total complex gets the same O.W.A. as that of liquid L . In system (3) the leftside boundary plane of the complex has, therefore, the same (or approximately the same) O.W.A. as liquid L .

If we bring the complex into the liquid L' , all its parts get the same O.W.A. as that of liquid L' ; in system (3) the right side boundary plane has, therefore, the same O.W.A. as liquid L' . As consequently we may in B_1 replace the O.W.A. of the liquids by the O.W.A. of the boundary planes of the whole membrane, it follows from this that C_1 obtains not

only for a homogeneous membrane, but also for a complex and a heterogeneous membrane.

What has been said in C_2 , however, does not always obtain for a complex and a heterogeneous membrane.

We shall first prove that C_2 does obtain for a system in which there is a membrane $M(W)$ e.g. for system (2). If we bring this membrane into the liquid L , it will get a definite W -amount in it; as the membrane is homogeneous, the W -amount on its boundary plane is the same as in every intersection. So in system (2) the W -amount of the left side boundary plane is the same (or approximately the same) as the W -amount, liquid L gives to the membrane. (viz. the W -amount the membrane gets, when it is brought entirely into the liquid L .) The same also obtains for the liquid L' and the right side of the membrane.

As we may, therefore, in B_2 replace the W -amount the liquids give to the membrane, by the W -amount of the boundary planes, it follows from this that C_2 obtains for a homogeneous membrane $M(W)$.

If we bring the membrane $C.M(W)$ of system (3) into the liquid L , then this complex also gets a definite W -amount; as, however, the water is divided unequally over M_1, M_2 etc., M_1 has an other W -amount than M_2 ; etc. So the W -amount of the left side boundary plane of M_1 now determines only the W -amount of the part M_1 but it does not determine the W -amount of the other parts M_2, M_3 , etc., which are quite independent of it. The average W -amount of the complex is, therefore, entirely independent of the W -amount of the left side boundary plane; a greater as well as a smaller W -amount of the complex may go with a certain W -amount of the boundary plane. Consequently in B_2 we are not allowed to replace the W -amount a liquid gives to a complex membrane, by the W -amount of its boundary plane; from this it follows that in general C_2 does not obtain for a complex or heterogeneous membrane. As we shall see further on, we must replace C_2 by:

C_3 . when two boundary planes of a complex or heterogeneous membrane $M(W)$ have the same W -amount, water may yet diffuse; when the two boundary planes have a different W -amount, the water can travel as well towards the boundary plane with the greater — as towards that with the smaller W -amount; it is also possible, however, that no water will then diffuse.

Previously we have said:

the water runs downward when it travels towards the boundary plane with the smaller W -amount (down current); the water runs upward when it travels towards the boundary plane with the greater W -amount (up current).

We now further add to this:

the water runs on a level when it diffuses between two boundary planes with the same W -amount (level current).

are in contact with liquid, yet by exchanging water they all get the same W -amount, which each of them would get separately in the liquid a . As a_1 and a_4 differ as a rule, it follows, therefore :

no water diffuses although the boundary planes have a different W -amount.

We may say also :

the membrane is currentless although the boundary planes have a different W -amount.

If in system (5) we go from left to right, the W -amount changes five times by leaps and bounds, viz. at every place where a membrane borders upon a liquid or an other membrane ; these leaps of the W -amount may go all as well in the same as in alternate direction. Going from left to right, the O.W.A. does not change, however ; this accounts for the fact that no water-movement occurs in this system.

All that has been said above of system (5) also obtains for the systems :

$$L | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | L' \text{ ————— } W (6)$$

$$L | Ht. M(W) | L' \text{ ————— } W (7)$$

in which L and L' represent two arbitrary isotonic liquids ; so we have :

E. a complex or heterogeneous membrane $M(W)$ may be currentless, although the boundary planes have a different W -amount.

With a homogeneous membrane $M(W)$ this is only possible when the two boundary planes have the same W -amount.

In system (6) the W -amount changes from the one towards the other boundary plane by leaps and bounds ; in system (7) this W -amount changes continually ; we shall refer to this once more later on.

When a W -current runs through a complex or a heterogeneous membrane $M(W)$, this may be a down- an up- or a level current, as we have said in D_2 . In order to prove this with some examples, we take the osmotic system :

$$a \left| \begin{array}{c} M_1 \\ a_1 \quad p_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} M_2 \\ q_2 \quad b_2 \end{array} \left| b \right. \quad \text{fig. 1 (8)}$$

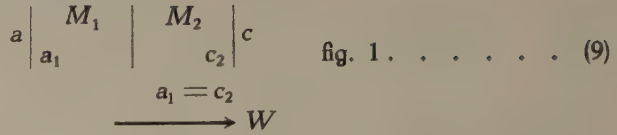
$$\xrightarrow{a_1 < b_2} W$$

with the liquids a and b of fig. 1. As b has a greater O.W.A. than a , the water diffuses, therefore, according to the arrow in (8).

The liquid a gives to the left side boundary plane of M_1 a W -amount $= a_1$ (viz. aa_1 fig. 1) ; the liquid b gives a W -amount $= b_2$ (viz. bb_2 fig. 1) to the right side boundary plane of M_2 . As $a_1 < b_2$, the water will diffuse towards the boundary plane with the greater W -amount. So we find :

F_1 . in system (8) the water runs upward. We shall refer to the meaning of p_1 and q_2 later on.

We now take the osmotic system :



with the liquids a and c of fig. 1. As c has a greater O.W.A. than liquid a , the water will diffuse, therefore, in the direction of the arrow.

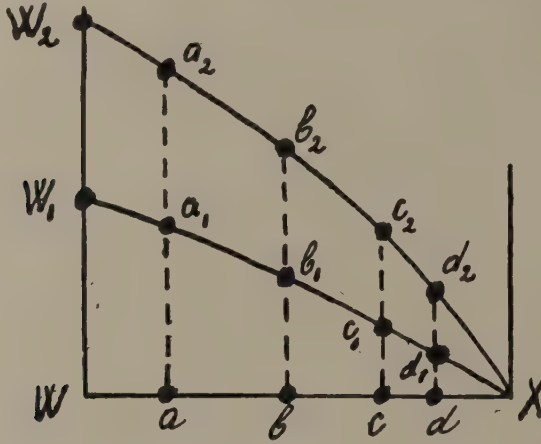
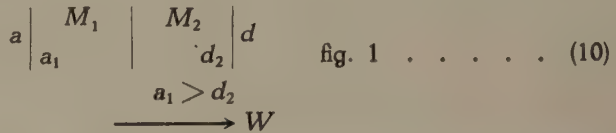


Fig. 1.

Liquid c now gives a W -amount c_2 (viz. cc_2 fig. 1) to the right side boundary plane of M_2 ; we now imagine $a_1 = c_2$; then we see :

F_2 . in system (9) the water runs on a level.

In the osmotic system :

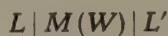


we find the liquids a and d of fig. 1; also in this system the water diffuses towards the right. As $a_1 > d_2$, follows :

F_3 . in system (10) the water runs downward.

In the very simple systems (8), (9) and (10), in which the complex membrane does not yet consist of more than two parts, we see already a confirmation of what we have said above in D_2 ; consequently we have in general :

G. in the osmotic system :



the water always diffuses downward ; in the osmotic systems :

$$L | C . M(W) | L' \quad \text{and} \quad L | Ht . M(W) | L'$$

the water can diffuse downward, upward or on a level ; of course it depends upon the nature of the boundary planes of these membranes, which of these cases will occur.

We shall consider the osmosis in system (8) a little more in detail ; as the water here diffuses towards the right, it will consequently travel also towards the right in each of the separate parts M_1 and M_2 .

As these parts, taken separately, are homogeneous, however, the water must run downward in each of these parts. If we represent the W -amount of the right side boundary plane of M_1 by p_1 and that of the left side boundary plane of M_2 by q_2 (compare system 8), we have, therefore :

$$a_1 > p_1 \quad q_2 > b_2 \quad a_1 < b_2 (11)$$

From this follows $p_1 < q_2$; so we find :

if in system (8) we go in the direction of the W -current, the W -amount will first decrease continuously from a_1 to p_1 ; it then leaps up to q_2 and afterwards descends continuously to b_2 .

If we put $p_1 = a_1 - \Delta a$ and $q_2 = b_2 + \Delta b$, then Δa and Δb are positive ; we now find :

$$q_2 - p_1 = (b_2 - a_1) + (\Delta a + \Delta b) (12)$$

From this it appears that the leap in the W -amount (viz. $q_2 - p_1$) is greater than the difference of the W -amount of the two extreme boundary planes.

Of course in the systems (9) and (10) the W -amount also changes with leaps and bounds, where the parts M_1 and M_2 border upon one another.

In the systems :

$$\begin{array}{ccc} & L | M(W) | L' \\ L | C . M(W) | L' & & L | Ht . M(W) | L' \end{array}$$

we can turn the membrane about ; the boundary plane, which first was in contact with the liquid L , then comes into contact with L' , and the reverse. We now can deduce :

H. a conversion of a complex or heterogeneous membrane $M(W)$ of a system does not change the direction of the W -current ;

a downcurrent, however, can become an up- or a level current by this and the reverse.

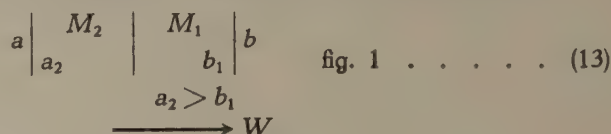
the water absorbed is divided differently and the velocity of the W -diffusion may change.

A conversion of a homogeneous membrane $M(W)$ does not cause a change.

As has already been said above, the conversion of a membrane has no influence on the direction of the W -current ; this is also clear, because this direction is determined only by the O.W.A. of the two liquids.

We shall prove by some examples that this conversion may also have the consequences, mentioned in *H*.

If we turn about the membrane of system (8), we get the system :



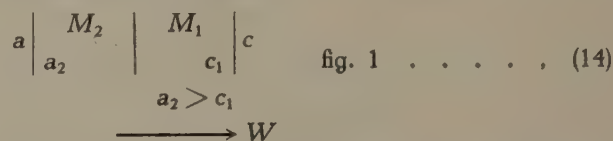
Now the liquid *a* is in contact with M_2 ; now it does not give a W -amount $= a_1$ as in (8) to the left side boundary plane, but a W -amount a_2 (viz. aa_2 fig. 1), which is greater than a_1 . Now the liquid *b* is in contact with M_1 ; it now gives a W -amount b_1 (viz. bb_1 fig. 1) which is smaller than b_2 in system (8), to the right side boundary plane.

From this we see that the conversion of the membrane results in the W -current, although it does not change its direction, becoming a down-current instead of an upcurrent; in system (8) namely the water runs towards the boundary plane with the greater, in system (13) towards the boundary plane with the smaller W -amount.

Above we have seen that the two boundary planes of the membrane in (8) have an other W -amount than in (13); the difference of the W -amount of the two boundary planes also differs in the two systems; the difference in (13) viz. $a_2 - b_1$ is, according to fig. 1, greater than the difference in (8) viz. $b_2 - a_1$.

From this it appears already that the conversion of the membrane is the cause of an entirely different distribution of the water absorbed; if we consider corresponding intersections of the membrane, they have a different W -amount before and after the conversion.

If we turn about the membrane of system (9) we get :



in which the W -amount a_2 of the left side boundary plane is greater than the W -amount c_1 of the right side plane (comp. fig. 1); in system (9), however, these W -amounts are the same.

So from the conversion of the membrane now results that the W -current although it does not change its direction, now is a downcurrent instead of a levelcurrent.

Here also it is clear now that the conversion of the membrane must be the cause of an entirely different distribution of the water absorbed; in (9) namely the two boundary planes have the same W -amount; in (14), however, they have a different W -amount.

The velocity of diffusion of the water through a membrane does not only depend upon its nature, but also upon the distribution of the water

absorbed; consequently, as has been said already in *H*, it is possible that the conversion of a complex or heterogeneous membrane $M(W)$ is the cause of a change in the velocity of the water-diffusion.

It appears among other things from the above that we must be very careful, when we want to deduce something about the direction in which the water will diffuse, from the W -amount of the boundary planes of a membrane $M(W)$; this namely is possible only then when the membrane is homogeneous (downcurrent), but it is not possible when the membrane is complex or heterogeneous, as is generally the case in Nature.

(To be continued.)

Leiden, Lab. of Inorg. Chemistry.

Physics. — *The testing of monocrystalline wires.* By W. J. DE HAAS and P. M. VAN ALPHEN. (Communication N^o. 204d from the Physical Laboratory Leiden).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Introduction. Since several years the change in resistance of monocrystalline wires at low temperatures has been investigated in the cryogenic laboratory.

A difficult problem in this investigation is the testing of the monocrystalline wires.

For thick wires the method of BRIDGEMAN ¹⁾ can be used with success:

The wire is examined in a beam of parallel light. The surface of the etched wire is covered with a great number of very fine holes the walls of which consist of crystal planes (negative crystals).

For a definite position of the wire with respect to the incident light this is reflected by these planes, so that the whole wire flashes up, at least when it is monocrystalline. At the point, where eventually a collateral crystal occurs, the wire remains dark, the crystal planes having there another direction, so that they do not reflect the light in the direction of the eye of the observer.

For thinner monocrystalline wires (0.2 mm. and less) the method of BRIDGEMAN cannot be used. We will describe here a method, which we invented and worked out not to fix the direction of the crystal axis but only to test the monocrystallinity of the wire.

The method is a very quick one and in the course of time it has been proved to be very useful.

It consists in the making of a series of LAUE photographs of the wire. The wire is transversed by a fine beam of white X-rays, so that a number of LAUE spots is formed on a film behind the wire.

In order to see whether we have to do with one single crystal, the wire and photographic plate are displaced together in the direction of the wire and another photograph is taken. If at the place now transversed by the RÖNTGEN rays the crystal lattice has the same orientation as at the first one, we obtain just the same LAUE spots only displaced on the photographic plate with respect to the former spots. This process is repeated several times, until the whole wire is examined. If it is fairly well monocrystalline all LAUE spots will lie on straight lines parallel with the direction of displacement (fig. 1). If however the wire is but slightly twisted, a displacement of the wire changes the orientation of the lattice with respect

¹⁾ BRIDGEMAN, *Proc. Amer. Acad. of Arts and Sc.* **60**, 305, 1925.

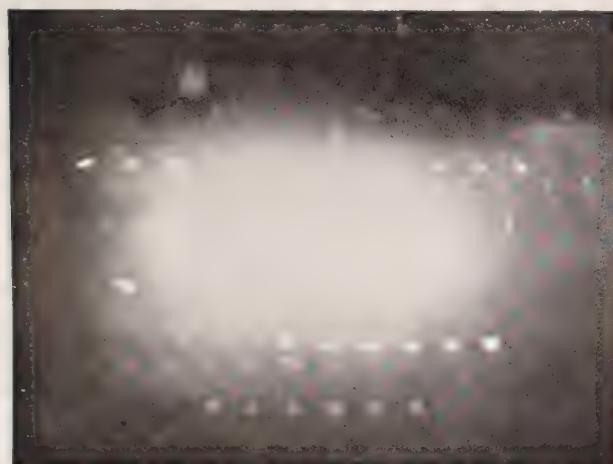


Fig. 1.

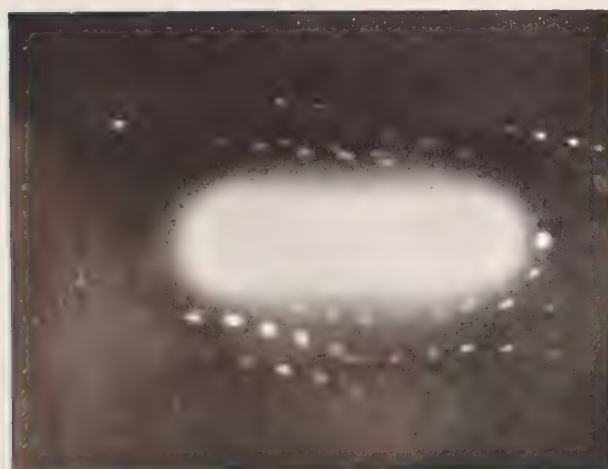


Fig. 2



Fig. 3.

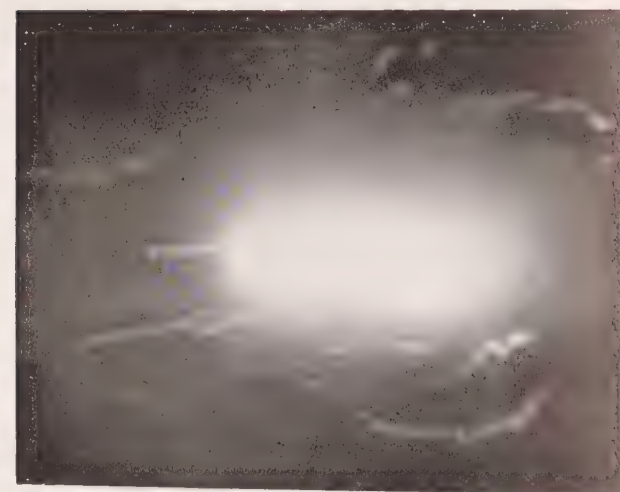


Fig. 4.

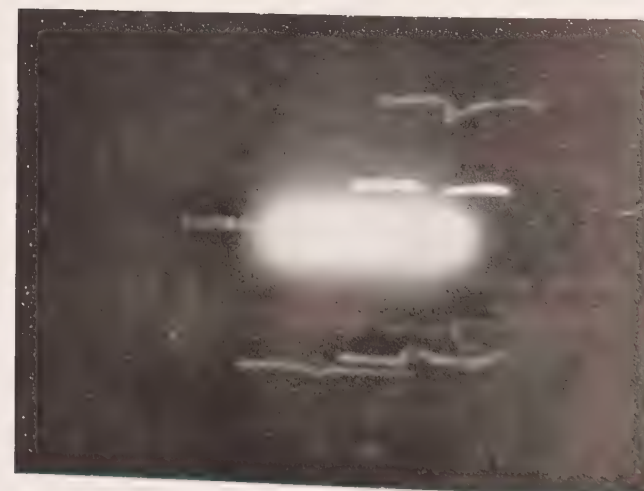


Fig. 5

to the incident beam, so that the LAUE spots do not lie any longer on straight lines (fig. 2).

The experiments. In the way usual in resistance measurements the wires are mounted without tension on small pieces of ivory (fig. 6). Through a slit in the ivory a beam of RÖNTGEN rays can fall on the wire (BOUWERS tube of PHILIPS 90 KV., 10 mA, tungsten anti-cathode).

Both the wire, which is placed horizontally, and the photographic film are mounted on a sledge which can be moved horizontally by means of a screw. By the use of accelerating screens before and behind the film, the exposition time is reduced to one minute. This renders it possible to move wire and film continuously (1 mm per min.). Instead of spots we now obtain lines (fig. 3) which must be parallel.

When however the monocrystalline wire is displaced not exactly parallel to the photographic film, the lines are a little convergent. This deviation from parallelism however is easily distinguishable from that caused by a torsion of the wire.

Results. Cooling down the wires to the temperature of liquid helium was proved not to disturb the monocrystallinity. On the other hand the wires were found to be very sensitive to mechanical perturbations, so that they must be treated with the utmost care. As an example the wire of fig. 3 which was 4 cm long, was bent out in the middle over 1 mm and pushed straight again. Visually no disturbances could be detected, but in the RÖNTGEN photographs they are prominent (fig. 4).

We also investigated in how far the soldering of a potential wire caused disturbances. For this purpose we soldered a small sphere *B* of ± 1 mm diameter to the middle of a good tin wire *W* (fig. 6). The monocrystal was found to be disturbed in loco, while the wire was proved to be twisted over a length of 1 mm at both sides of the soldering point. This conclusion could be drawn from the interruption and the bending out of the LAUE lines (fig. 5).

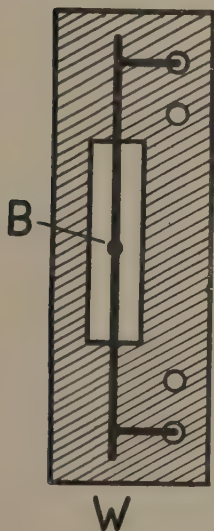


Fig. 6.

The above described both simple and quick method to test monocrystalline wires may be of use in the great number of investigations for which monocrystalline wires are wanted.

The wires used in the above experiments were made and mounted by Mr. J. VOOGD, to whom we gladly express our thanks for this work.

Physics. — *Magnetische Widerstandsvergrößerung in Einkristallen von Wismut bei tiefen Temperaturen.* Von L. SCHUBNIKOW und W. J. DE HAAS. (Mitteilung N^o. 207a aus dem Physikalischen Institut Leiden).

(Communicated at the meeting of February 22 1930).

An zwei drahtförmigen Einkristallen von Wismut (Querschnitt 1.5×0.8 mm. und lange 22 mm.) mit Orientation der Hauptachse \parallel Drahtlänge wurden in Magnetfeldern bis zu 22 Kgauss resp. 31 Kg. $R_H/R_{0^\circ \text{C.}}$ ¹⁾ Werte gemessen und zwar bei verschiedener Orientierung des Feldes H senkrecht zur Drahtrichtung (ist gleich Hauptachse des Kristalles).

In Fig. 1 und 2 sind $R_H/R_{0^\circ \text{C.}}$ Werte für beide Kristalle N 622 und N 674 in Abhängigkeit vom Felde H gegeben.

Die Kurven „Max“ und „Min“ entsprechen denjenigen Orientierungen der binären Achsen des Kristalls die extreme R_H Werte liefern.

Der Kristall 622 ist weniger gut; dies erkennt man an der Temperaturabhängigkeit seines Widerstandes ohne Magnetfeld.

Folgende $R/R_{0^\circ \text{C.}}$ werte wurden für beide Kristalle bei Wasserstofftemperaturen gefunden:

$R/R_{0^\circ \text{C.}}$				
N	20.43° K.	20.37° K.	14.22° K.	14.15° K.
622		0.04738	0.02520	0.02496
674	0.04689	0.04666		0.02435

Man berechnet hieraus extrapolatorisch ²⁾ für $T = 1.5^\circ \text{K}$ folgende „Restwiderstände“.

$$(R_{1.5 \text{ K.}/R_{0^\circ \text{C.}})_{622} = 0.0023 \cdot (R_{1.5 \text{ K.}/R_{0^\circ \text{C.}})_{674} = 0.0017.$$

Diese Extrapolation wurde gemacht mit Hilfe der Messungen von $R_{20^\circ \text{K.}}$, $R_{14^\circ \text{K.}}$ und $R_{1.5^\circ \text{K.}}$ die an anderen Exemplaren von Wismut Einkristallen gemacht wurden. Man kann mit Hilfe der angegebenen Zahlen den Verlauf von $R_H/R_{0^\circ \text{C.}}$ umrechnen in den von R_H/R bei den in der Tabelle angegebenen Temperaturen.

¹⁾ R_H ist Widerstand im Felde H bei tiefer Temperatur, $R_{0^\circ \text{C.}}$ Widerstand ohne Feld beim Eispunkte.

²⁾ Die Kristalle 622 u. 674 konnten im Augenblick noch nicht bei Heliumtemperaturen gemessen werden.

Der Kristall 674 zeigt bei $14,15^\circ \text{ K.}$ und $H = 30,9 \text{ K.G.}$ den enormen Wert
 $(R_H/R)_{14,15 \text{ K.}} = 176000.$

Der Kristall 622 zeigt eine kleinere Widerstandsänderung. Bemerkenswert ist, dass ein verhältnismässig kleiner Unterschied des Restwiderstandes der beiden Kristalle einen so grossen Unterschied in $R_H/R_{0^\circ \text{ C.}}$ bei tiefen Temperaturen hervorruft.

N 622

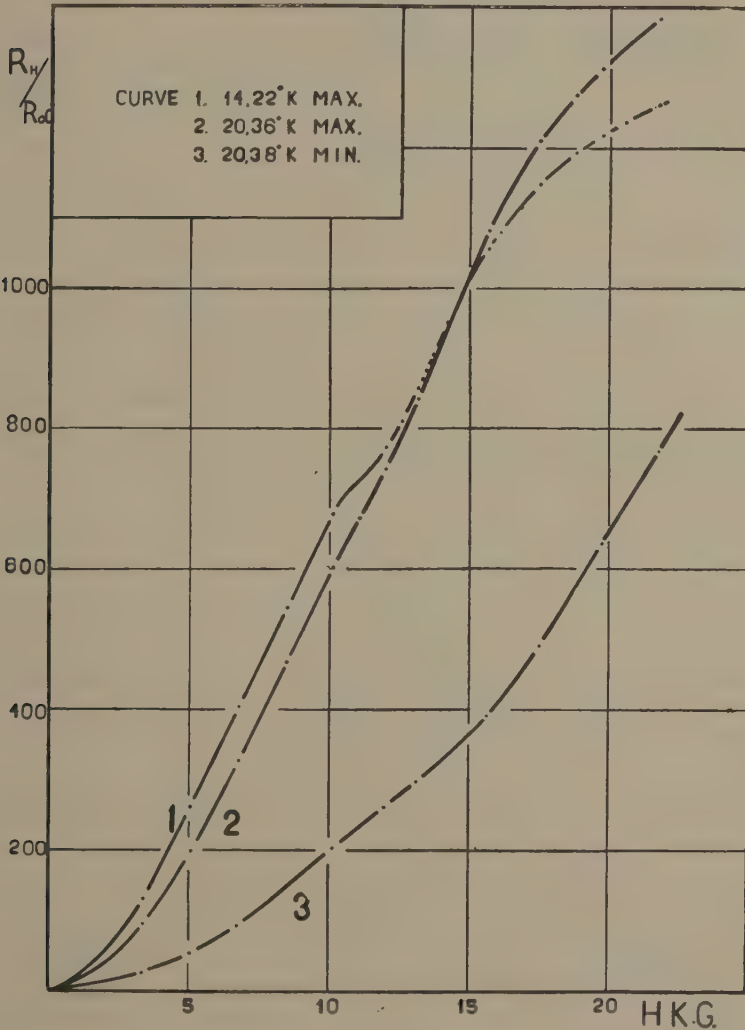


Fig. 1.

Bei den höheren Temperaturen $77,4^\circ \text{ K.}$ und 64° K. dagegen wurde innerhalb der Fehlergrenzen für beide Kristalle $R_H/R_{0^\circ \text{ C.}}$ gleich gross gefunden.

Wie die Fig. 1 und 2 zeigen liefern unsere Messungen besonders bei

14° K. eine überraschend komplizierte Abhängigkeit des R_H von H , welche noch einer näheren Aufklärung bedarf.

Um zu prüfen ob es sich hierbei nicht um einen blossen Störungseffekt handelt, haben wir eine Reihe von Kontrollversuchen vorgenommen. Wir konnten vor allem feststellen, dass die Kurven gut reproduzierbar sind und für steigendes und fallendes Feld H exakt zusammenfallen.

N 674

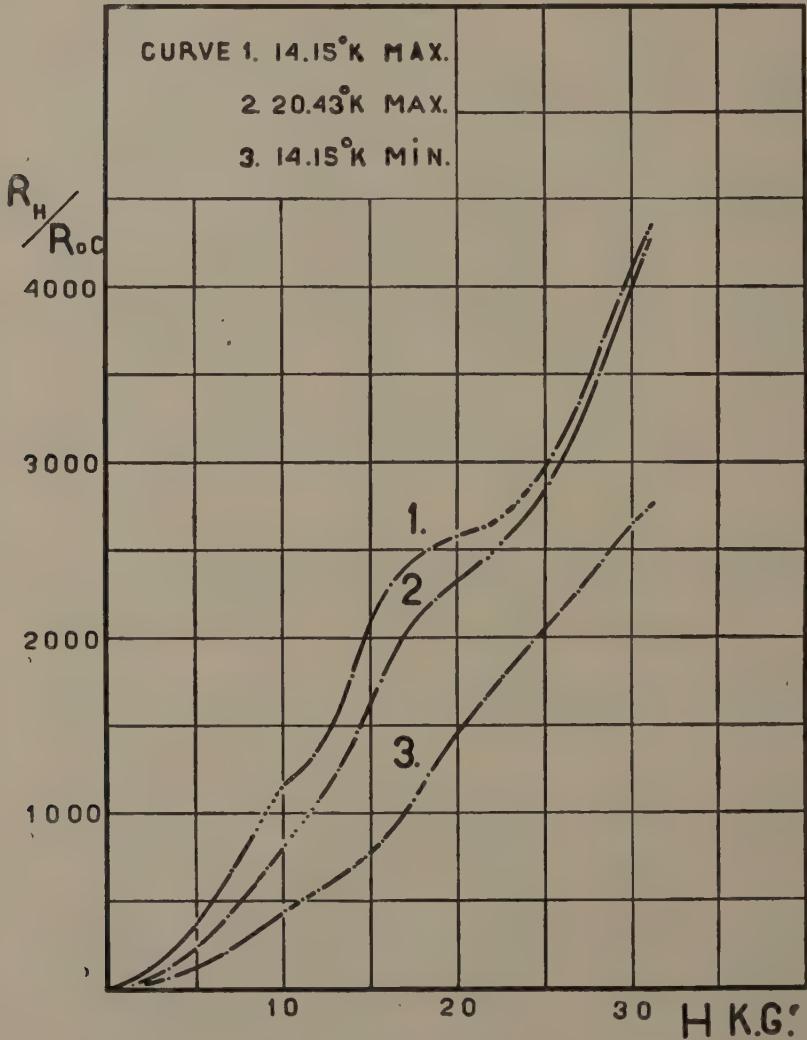


Fig. 2.

Den Widerstand von Kristall 674 haben wir im Gebiet bis $H = 22$ K.G. sowohl im grossen als im kleineren Elektromagneten des Laboratoriums durchgemessen. Der Verlauf blieb genau derselbe.

Der Widerstand von Kristall 622 wurde nur im kleineren Magneten bis $H = 22$ K.G. gemessen.

In diesem Gebiet, sind wie man sieht die Formen der Kurven für beide Kristalle sehr ähnlich.

Der Widerstand von Kristall 674 wurde für einige Felder (von 4 K.G. bis 31 K.G.) für alle mögliche Orientierungen gemessen bei denen die Drahtachse (ist gleich Hauptachse des Kristalls) senkrecht zum H -Feld bleibt.

Alle diese Kontrollversuche machen es vorläufig wahrscheinlich, dass dem komplizierten Verlauf der Kurven ein reeller Effekt zugrunde liegt.

Schlieslich möchten wie Herrn J. W. BLOM herzlich danken für seine Hilfe bei den Messungen.

Chemistry. — On the Difference of the Action of Peracids on Pyrogallol under the Influence of Peroxidase. By J. BÖESEKEN.

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

It has appeared from a number of investigations¹⁾ that peracetic acid and perbenzoic acid behave differently towards the double bond. The perbenzoic acids mostly cede one atom of oxygen, so that a derivative is formed of ethylene oxide (oxido-ethane); the peracetic acid, on the other hand, forms the mono-acetyl ester of the α -glycol.

H. WIELAND and H. SUTTER's paper in the "Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft"²⁾, in which it is stated that one-sidedly substituted derivatives of H_2O_2 , as peracetic acid, like hydrogen superoxide, but much less vigorously, oxidize pyrogallol to pupurogalline, under the influence of the peroxidase of the horse radish, whereas the derivatives of the perhydrol substituted on both sides do not do so, suggested the question whether by this way it would not be possible to establish an intrinsic difference between peracetic acid and perbenzoic acid. A provisional investigation actually seemed to show this difference clearly.

When thin slices of horse radish are washed with water according to WILLSTÄTLER's method³⁾ for six days, when then small pieces are cut off from them with a glass knife, and if a solution containing 0.25 % of pyrogallol and 0.0025 % of H_2O_2 is poured over these pieces, the solution is seen to become yellow after a few seconds, which colour gradually increases, for one reason because the solution contains more and more peroxidase, for another reason because the catalytic reaction progresses.

If this reaction is carried out with the equivalent quantity of peracetic acid, an analogous phenomenon is seen, but in accordance with WIELAND and SUTTER's investigation, much fainter. If, however, the equivalent quantity of *perbenzoic acid* is taken, hence by the side of 0.25 % pyrogallol $138 : 34 \times 0.0025 = 0.01$ % of this substance, a coloration rapidly appears, which, however, was entirely different from the colour of the purpurogalline.

In order to ascertain whether this can be caused by the benzoyl group behaving in general differently from the hydrogen atom of the perhydrol or the acetyl group in the peracetic acid, the experiment was repeated with *benzoyl peroxide*.

In contrast with diacethyl peroxide, benzoyl peroxide is practically

¹⁾ Recueil des tr. ch. des P.B. **45**, 838, 934 (1926) **47**, 683, 694 and 839 (1928) and **48**, 363, (1929).

²⁾ B. **63**, 66 (1930).

³⁾ Liebigs Ann. **416** p. 21 (1917).

insoluble in water, and it had first to be examined whether the peroxidase action also took place in $\pm 50\%$ alcohol. It is known from the investigations of WILLSTÄTLER (l.c.) that peroxidase is only precipitated for a small part by 50% alcohol; benzoylperoxide on the other hand is sufficiently soluble to obtain a solution equivalent to the above mentioned quantities.

The above described experiments were repeated with $\text{H}_2\text{O}_2 \cdot \text{CH}_3\text{CO}_3\text{H}$, $\text{C}_6\text{H}_5\text{CO}_3\text{H}$, and then with $[\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}]_2$.

The first-mentioned derivatives gave a very clear, and no less indecisive reaction, *the peroxide was absolutely inactive*. This is in perfect agreement with what was found by WIELAND in the other di-substituted derivatives of perhydrol, particularly of diacetyl peroxide, and it is, therefore, again a proof that the oxygen of the peroxide can absolutely not be activated by peroxidase.

The greatly deviating colour, observed in perbenzoic acid showed that the activating reaction was here of a different nature from the reaction in the perhydrol itself, and the question rose whether after all the peracetic acid, too, could quite be put on a line with hydrogen peroxide.

In order to get certainty on this head, a solution of peroxidase was prepared according to the indications of WILLSTÄTLER and STOLL (l.c.), in which the object in view was not so much to obtain a preparation of very high activity, as to obtain one of sufficient stability. Therefore after removal of the barite with CO_2 , we confined ourselves to a single precipitation with excess of absolute alcohol, and after having washed with this the precipitate was dissolved in 40% alcohol.

The purpurogalline-value of 1 ccm of this solution in 500 ccm of a solution of 0.25% $\text{C}_6\text{H}_3(\text{OH})_3$ and 0.0025% H_2O_2 was after 5' at $20^\circ = 20\text{--}24$ mg. Colorimetrically this was measured in small cylinder glass tubes by comparison; after 6 days this was unchanged. 5 cc of the peroxidase solution gave a value somewhat below 100 mg.

If instead of H_2O_2 the equivalent solution of peracetic acid was taken, this value appeared to be very much less than 20 mg; it could, however, not be accurately ascertained, as the tint was not a pure yellow. When I took 5 cc of peroxidase solution, this difference was even more pronounced.

The peracetic acid was prepared from pure acetic acid anhydride and 30% H_2O_2 , in such a way that there was no H_2O and no catalyzer, besides when the reaction was over the mixture of peracetic acid and acetic acid was distilled in cathode vacuum at the ordinary temperature. The distillate contained not a trace of H_2O_2 , as immediately after dilution with water one drop of KMnO_4 remained violet. Newly prepared it contained 250.6 mg of peracetic acid per cc, which percentage remained perfectly unchanged after a week.

Peracetic acid is really active, as WIELAND assumes, but probably it acts differently than H_2O_2 . I have rendered this probable also in the following way. A quantity of five grammes of pyrogallol and two litres of water, to which 25 cc of peroxidase-solution were added, were oxidised

with small quantities of peracetic acid solution, which was neutralised for $\frac{3}{4}$ (in order to diminish the quantity of free acid), in which we waited every time for 15' before a new quantity was added. Then the solution was left standing for an hour, after which it was shaken out with ether. After evaporation of the ether a reddish residue was left, from which no purpurogalline could be separated. An analogous experiment with H_2O_2 yielded the purpurogalline in perfectly pure condition (I may point out here that in the ordinary preparation of this quinone from pyrogallol and ferricyanogen potassium there are always formed bye-products not soluble in alcohol and ether.)

If instead of H_2O_2 the equivalent quantity of *perbenzoic acid* was taken (this compound was prepared from pure benzoylperoxide according to BAEGER and VILLIGER, and used in solid condition; it is dissolved in the reaction liquid within 30"), the liquid appeared to have become a dark brown-violet after 5', and also the ethereal solution, obtained after it had been shaken out three times, had the same tint. There can be no question here of a purpurogalline value, so that by this way it cannot be decided whether there has been attached more or less pyrogallol than with H_2O_2 .

Nor have I received an answer to the question whether perbenzoic acid behaves essentially differently in this reaction from peracetic acid. On the contrary, they seem rather to behave in an analogous way; whether they behave essentially differently from hydrogen peroxide would have to be decided by a much more thorough investigation, which very certainly is of great importance for the understanding of the peroxidase action; this investigation, however, was outside the task I had set myself.

Delft, Febr. 22, 1930.

Palaeontology. — *Fossiele overblijfselen van een toendra-vegetatie in Nederland.* (Voorloopige mededeeling.) Door F. FLORSCHÜTZ.
(Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

In het oosten van Overijssel worden ten behoeve van de steenfabricage kleilagen van uiteenloopenden geologischen ouderdom ontgonnen. Daarbij ontstaan groeven, welke zich met water vullen, zoodra zij niet meer kunstmatig worden droog gehouden.

Op dergelijke wijze had zich nabij het Weusthag, ongeveer een kilometer noordoostelijk van Hengelo, een meertje gevormd, dat reeds geruimen tijd mijn belangstelling had, in verband met geruchten over het voorkomen van plantenresten in den bodem.

De gelegenheid tot het instellen van een onderzoek bood zich aan, toen in het najaar van 1929 plannen tot het benutten van dezen plas voor een zwembad ten uitvoer werden gebracht, waartoe tijdelijke drooglegging noodig was. In de eerste dagen van 1930 was de bodem min of meer begaanbaar geworden, zoodat enkele profielen konden worden gegraven. Daaruit en uit hetgeen aan de randen van de groeve intact was gebleven kon worden afgeleid, dat vóór de ontginning op een vloerlaag van zand klei had gerust ter dikte van ongeveer vier meter, op korte afstanden afgewisseld door dunne laagjes plantenfragmenten.

Deze laatste bleken te bestaan in hoofdzaak uit deelen van bladmossen, waartusschen takjes, bladeren, vruchten en zaden bewaard waren.

Nader onderzoek wees uit, dat hier een mengsel van resten van een land- en een waterflora aanwezig was. Onder de overblijfselen van de eerste konden tot dusver worden herkend bladeren van *Dryas octopetala*, *Betula nana*, *Salix herbacea*, *reticulata* en vermoedelijk *retusa*; onder die der waterplanten zaden van *Menyanthes* en vruchtkernen van *Potamogeton*.

Blijkens welwillend door 's Rijks Geologischen Dienst verstrekte gegevens, omsluit het in den Riss-ijstijd gevormde glaciale landschap, waar gestuwd tertiair en praeglaciaal, grondmoraine en fluvio-glaciaal aan de oppervlakte liggen en waartoe de heuvels van Enschedé, Oldenzaal en Ootmarsum zoomede de zwakkere verheffingen bij Albergen, Borne en Delden behooren, een laagte, opgevuld met fluvio-glaciale en postglaciale sedimenten. Deze laagte heeft uitgangen naar het zuiden, westen en noordoosten. In het zuidelijk deel bevindt zich de besproken groeve van het Weusthag. Hier ligt de sterk-gereduceerde grondmoraine 20 à 25 meter onder de oppervlakte.

Men zou zich kunnen voorstellen, dat in eenig tijdvak na het afsmelten van de Riss-gletschers het terrein rondom de beschreven laagte bedekt is geweest met een toendra-vegetatie van *Dryas*, *Betula nana*, klein-bladige *Salices* en bladmossen, waarvan afgevallen en losgescheurde deelen

periodiek omlaag gespoeld en met autochthone resten van moerasplanten bedolven zijn onder slib, dat eveneens van die hoogten afkomstig was.

De vraag, of deze flora verband heeft gehouden met den Riss- dan wel met den Würm-ijstijd, kan thans nog niet beantwoord worden. Misschien zal het voortgezet onderzoek daaromtrent iets leeren.

In de eerste plaats zal getracht worden, de botanische resten nader te determineeren, ter verduidelijking van het beeld der fossiele flora in haar geheel, terwijl daarnaast, mede langs pollenanalytischen weg, naar wijzigingen in het karakter der vegetatie tijdens de afzetting van de klei gezocht zal worden.

Speciaal zal nagespeurd worden, of de „eikeldopjes” teruggevonden kunnen worden, welke, volgens den exploitant der groeve, herhaaldelijk aan de basis van de klei aangetroffen zijn. Zij zouden kunnen duiden op een boschperiode na den Riss-ijstijd, wellicht in het Riss-Würm-interglaciaal, waaruit zou moeten volgen, dat de toendra-flora aan den Würm-ijstijd haar ontstaan te danken had.

Op verscheidene plaatsen in Europa is, evenals in dit geval, waargenomen een samengaan van resten van arctisch-alpiene planten met die van een daar nog voorkomende waterflora, terwijl thans in het hooge noorden een dergelijke combinatie niet bestaat.

Men zoekt de verklaring van dit verschijnsel in het verschil in zonnestand, het aanwezig zijn van berghellingen en de daarmee gepaard gaande ongelijke verwarming van land en water ¹⁾.

Velp (G.), 19 Februari 1930.

ZUSAMMENFASSUNG.

Fossile Reste einer Tundra-Vegetation in den Niederlanden.

Vorläufige Mitteilung über das Vorkommen von Resten einer arktisch-alpinen Flora zusammen mit Wasserpflanzenresten in einer Tongrube in der Provinz Overijssel.

Gefunden sind Blätter von *Dryas octopetala*, *Betula nana*, *Salix herbacea*, *reticulata* und *retusa* (?), Samen von *Menyanthes*, Endokarpe von *Potamogeton* und Laubmoose.

Vermutet wird, dass in einer Periode nach dem Rückzug des Riss-gletschers, dessen stark-reduzierte Moränen die umliegenden Hügel teilweise bedecken, aber sich in der Grube ungefähr zwanzig Meter unter dem Ton befinden, die nächsten Höhen von einer Tundra-Flora besiedelt waren, deren abgefallene und abgerissene Teile vom Wasser hinunter befördert wurden.

Vielleicht wird bei fortgesetzter Untersuchung die Beantwortung der Frage nach dem Zusammenhang dieser Flora mit einem Abschnitt der Riss- oder der Würm-Eiszeit möglich sein.

¹⁾ Verwezen moge worden naar het artikel van A. G. NATHORST: Spätglaciale Süßwasserablagerungen mit arktischen Pflanzenresten in Schonen (Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar, Bd. 32, 1, 1910).

Geology. — *Notice sur le prolongement occidental dans le Jura français du décrochement de St. Cergue.* Par A. J. PANNEKOEK. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1930)

Le décrochement de St. Cergue est une des grandes failles à déplacement horizontal, qui traversent les chaînes du Jura dans des directions telles qu'elles forment un angle aigu avec la direction de ces chaînes. Du côté de cet angle aigu les chaînes sont plus avancées vers le NW que du côté de l'angle obtus, de sorte que les chaînes ont subi un prolongement.

Le décrochement de St. Cergue, qui a été étudié par H. LAGOTALA ¹⁾, a une direction approximative E—W, les chaînes au S se sont donc déplacées vers l'W et cela sur une distance atteignant 1400 m, mais le déplacement diminue en allant vers l'W. LAGOTALA n'a pu traverser la frontière franco-suisse par suite des conditions de la guerre, mais il existe de la partie française une carte schématique d'ALBERT HEIM ²⁾, qui montre une courbe de la faille près de La Chaille où elle en viendrait à un décrochement dirigé N—S, qui aurait par conséquent un déplacement en sens inverse. Au point de flexion le déplacement serait zéro et le décrochement ne pourra être observé.

Cette notice traite la partie du décrochement E—W de St. Cergue sur le territoire français jusqu'au point où il devient invisible. Elle représente les résultats d'une partie des levés faits par l'auteur en collaboration avec M. H. BOISSEvain pendant l'été de 1929, et comprises dans les travaux exécutés dans le Jura français par des élèves de M. le professeur L. RUTTEN de l'Université d'Utrecht. Une étude de toute la région des Rousses sera publiée par M. TH. RAVEN.

Les dépôts plistocènes et holocènes, qui couvrent une grande superficie dans la partie occidentale du terrain, ne sont pas indiqués sur la carte pour que la structure du sous-sol puisse mieux ressortir.

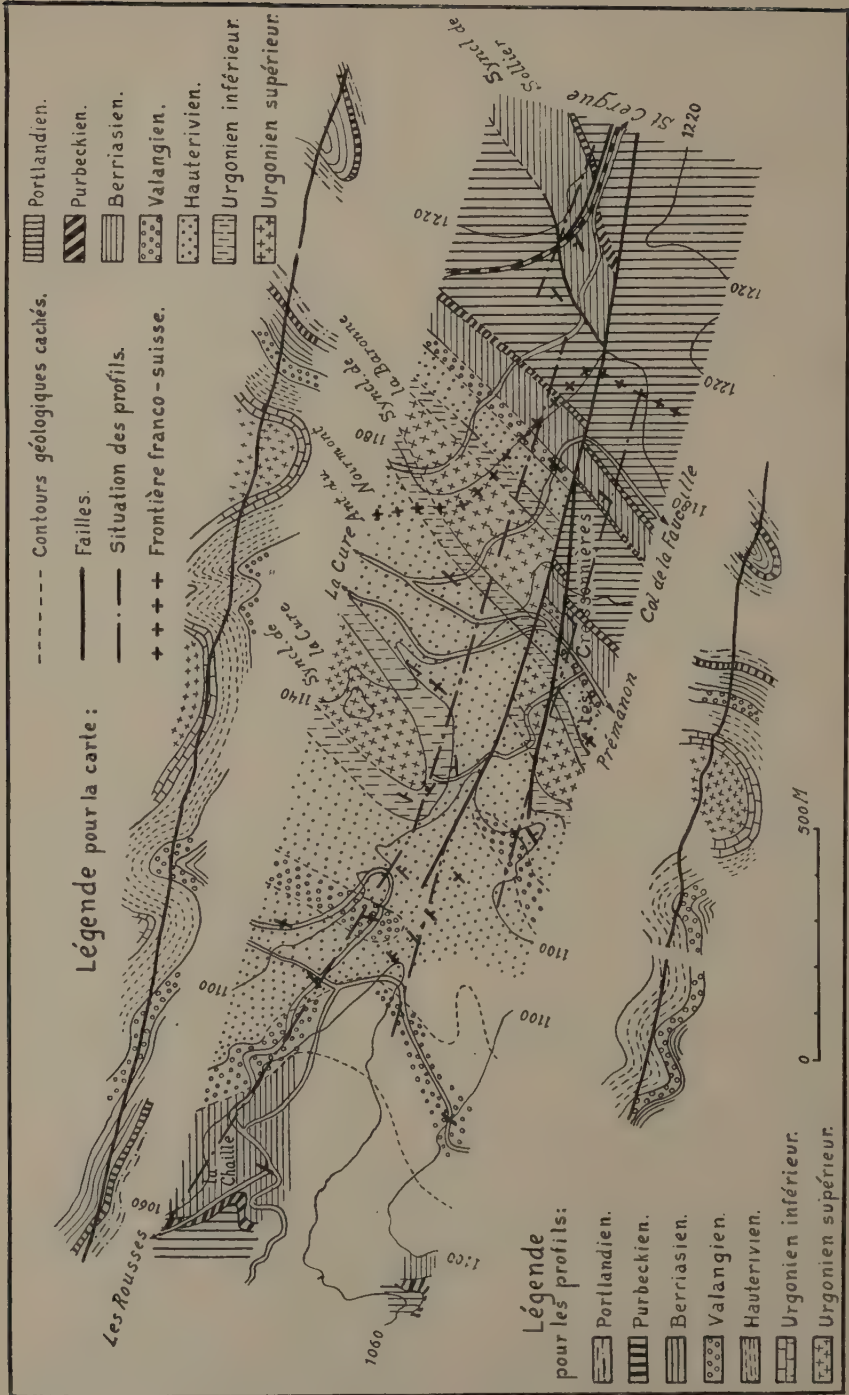
Remarques sur la stratigraphie.

En général la série stratigraphique a le même caractère que celle décrite par LAGOTALA. Nous donnons seulement quelques observations.

Du Purbeckien il faut mentionner les belles brèches à éléments noirs et multicolores trouvées sur la route de la Cure à Prémaman.

¹⁾ H. LAGOTALA, Étude géologique de la région de la Dôle etc. Mat. carte géol. Suisse N.S. XLVI, 4^{ème} partie.

²⁾ ALBERT HEIM, Geologie der Schweiz, I. Voir aussi E. DE MARGERIE, Le Jura, I, Mém. carte géol. dét. France. p. 116.



Nous n'avons pas divisés le Berriasien en deux parce qu'il y a une assez grande ressemblance entre les deux subdivisions. Ils sont composés tous les deux de calcaires assez compacts, clairs (jaunes, gris, bruns clairs), consistant en éléments de microbrèche et en oölites ; ils contiennent peu de marnes et de calcaires granuleux. Le contact avec le Purbeckien a été observé à La Chaille. Ce dernier est formé de marnocalcaire à tiges de Chara et son toit montre des phénomènes de ravinage sous forme de petites crevasses, dans lesquels pénètre la microbrèche du Berriasien. Au dessus de ce plan de contact le Berriasien se compose de microbrèches à éléments sublithographiques assez grands, mêlés de couches sublithographiques. C'est peut-être le même phénomène que celui observé par SAUTIER ¹⁾ au Fort des Rousses.

Pour ce qui regarde le Valanginien, une détermination ultérieure des fossiles que nous avons trouvés dans des marnes 200 m à l'E de La Chaille pourra décider si c'est la faune des Marnes d'Arzier. Le Calcaire Roux ressemble à celui de St. Cergue ; il est peut-être plus oölitique. Sa couleur brune ou brun-rousse incline vers le brun-violacé en condition sèche.

Le Hauterivien inférieur devient plus calcaireux en allant vers l'W ; au sujet du Hauterivien supérieur il faut mentionner que nous n'avons pas observé des couleurs plus claires vers le sommet de l'étage. Par endroits la glauconie a continuée de se déposer dans l'Urgonien inférieur.

L'Urgonien inférieur contient des calcaires compacts et clairs de plusieurs couleurs, entre autre un calcaire d'un brun-rouge violent près du sommet. La transition à l'Urgonien supérieur est souvent formé par un calcaire oölitique blanc.

Remarques sur la tectonique.

Près de l'endroit où le décrochement passe la frontière il coupe le synclinal de Sollier. La faille, indiquée par LAGOTALA, qui longe le chemin-de-fer n'est qu'un embranchement ; la faille principale passe au sud de la route et déplace ce synclinal sur une distance d'environ 350 m. Au sud du décrochement le synclinal a la même structure qu'au nord : il est renversé vers l'E, toutefois le Purbeckien de son flanc nord-ouest n'a pas disparu complètement.

Le synclinal de La Baronne, dont le flanc sud-est a été déplacé sur une distance de 250 m environ et le flanc nord-ouest sur 170 m, subit encore un déplacement, montant à environ 50 m, un peu plus au S, ce qui nous a obligés à admettre l'existence d'une seconde faille. Au flanc nord-ouest de ce synclinal cette faille est moins distincte et nous ne savons pas si elle se prolonge longtemps vers l'W.

L'anticlinal du Noirmont présente au N. du décrochement des irrégularités dont le profil ne donne qu'une approximation.

L'inclinaison perpendiculaire des couches entre cet anticlinal et le

¹⁾ G. MAILLARD, Étude sur l'étage Purbeckien dans le Jura. Diss. inaug. Zurich 1884.

synclinal de la Cure se termine en s'approchant du décrochement du côté nord et passe à des inclinaisons faibles, qui, plus au sud, contournent le noyau du synclinal, de sorte que ce dernier se termine avec une inclinaison axiale d'environ 25 degrés.

Le terrain plus au NW, qui n'offre que peu d'affleurements est constitué par un nouvel anticlinal, suivi par des couches à inclinaisons faibles vers le SE (sauf quelques ondulations secondaires), lesquelles représentent le flanc sud-est de l'anticlinal à noyau portlandien des Rousses.

Au sud du décrochement du côté de l'W le synclinal de La Baronne est suivi par deux anticlinaux dont le dernier ne montre plus un déplacement vers l'W, si toutefois ici une parallélisation avec les éléments tectoniques au nord du décrochement est permise. Dans la bande de Purbeckien plus à l'W, dont la carte ne montre qu'une petite partie, l'influence de la dislocation N—S de Morez se manifeste probablement.

Mathematics. — *Adjustment of N Points (in n -dimensional Space) to the best linear $(n-1)$ -dimensional Space. I.* By Prof. M. J. VAN UVEN. (Communicated by Prof. A. A. NIJLAND).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

The present paper deals with the problem: to fit a linear space τ of $n-1$ dimensions (hyperplane) through a certain number (N) of points in a linear space of n dimensions, or, expressed analytically, to determine the constants of that equation $p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = 0$ which agrees best with the N sets of coordinates x_1, x_2, \dots, x_n .

We shall distinguish the given points S from one another by an index in brackets. So the point $S(m)$ has the coordinates $x_i(m)$; $i = 1, \dots, n$; $m = 1, \dots, N$. A summation over the n coordinates will be indicated by $\sum_{i=1}^n$, or, if no misunderstanding is to be feared, by \sum_i , or, more simply, by Σ . On the other hand a summation over the N points will be designated by $[\]$.

We want then to determine the ratios of the constants $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ of the equation

$$p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \equiv p_0 + \sum_{\lambda=1}^n p_\lambda x_\lambda = 0$$

in such a way, that the given coordinates $x_i(m)$ satisfy this equation as well as possible.

Instead of operating with the ratios of the constants (parameters) $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$, we may normalize them in some way, either by considering p_1, p_2, \dots, p_n as the direction-cosines of the normal of τ ($\Sigma p_\lambda^2 = 1$), or by some other method.

§ 1. *Solution of the problem.*

As a rule the best hyperplane τ will not pass exactly through any of the given points. Thus we shall be obliged to shift the points $S(m)$ to other points $T(m)$ (with coordinates $X_i(m)$) which do lie in τ and therefore really satisfy

$$p_0 + p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_n X_n = p_0 + \sum_{\lambda=1}^n p_\lambda X_\lambda = 0. \quad (1)$$

The deviations $\overrightarrow{T(m)S(m)}$ of the given or "observed" points $S(m)$ from the "adjusted" points $T(m)$ have the projections

$$\xi_i(m) = x_i(m) - X_i(m) \quad m = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

In the observed point $S(m)$ the expression $p_0 + \sum p_\lambda x_\lambda$ assumes the value

$$q_0(m) = p_0 + \sum_{\lambda=1}^n p_\lambda x_\lambda(m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

This value is, if not equal, at least proportional to the distance of the point $S(m)$ from the hyperplane τ .

Now we have, by (1) and (2),

$$q_0(m) = p_0 + \sum_{\lambda} p_\lambda X_\lambda(m) + \sum_{\lambda} p_\lambda \xi_\lambda(m) = \sum_{\lambda} p_\lambda \xi_\lambda(m) \quad . \quad . \quad (4)$$

We consider the observed point S as that position of T , which is most probable a priori.

The projections $-\xi_i$ of the displacements \vec{ST} are supposed to be subject to the general n -dimensional probability-law:

$$dW = \left(\frac{F'}{\pi^n} \right)^{1/2} \cdot e^{-f'} \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \dots d\xi_n,$$

where

$$f' \equiv \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n f'_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu$$

is a positive-definite homogeneous quadratic form, and F' the determinant $F' = |f'_{\lambda\mu}|$, the minor (algebraic complement) of f'_{ij} being denoted by F'_{ij} .

We assume that the above n -dimensional probability-formula is the same for all the points of the n -dimensional space. This formula indicates as it were the movability in the different directions. Since we can only make suppositions about the relative movability in the different directions, we cannot prescribe beforehand the coefficients f'_{ij} , but only their ratios.

Thus, putting

$$f'_{ij} = \theta f_{ij}$$

we may give the quantities f_{ij} , leaving the value of the constant θ unsettled for the present.

Putting

$$f = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n f_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu, \quad F = |f_{\lambda\mu}| \quad (\text{with minors } F_{ij}). \quad . \quad . \quad (5)$$

we have

$$f' = \theta \cdot f, \quad F' = \theta^n \cdot F, \quad F'_{ij} = \theta^{n-1} \cdot F_{ij}.$$

So the probability-formula for the deviation $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ becomes:

$$dW = \left(\frac{\theta^n F}{\pi^n} \right)^{1/2} \cdot e^{-\theta f} d\xi_1 \cdot d\xi_2 \dots d\xi_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

This probability-formula shows that the extremities of equally probable displacements lie on a hyper-ellipsoid

$$f = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} f_{\lambda\mu} \xi_{\lambda} \xi_{\mu} = \text{const.}$$

around the centre S .

In order to facilitate the study of the conditions in the given anisotropic space, we shall transform it into an isotropic space. For this purpose we put firstly:

$$f_{ii} = h_i^2, \quad f_{ij} = g_{ij} h_i h_j \quad (\text{whence } g_{ii} = 1) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Since f must be positive-definite, the coefficients g_{ij} must lie between -1 and $+1$.

Further, putting

$$h_i \xi_i = \eta_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

the form f passes into

$$g \equiv \sum_{\lambda} \sum_{\mu} g_{\lambda\mu} \eta_{\lambda} \eta_{\mu}$$

Interpreting $\eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ as coordinates in a skew rectilinear system of reference (the axes of η_i and η_j including an angle the cosine of which is g_{ij}), the equation

$$g \equiv \sum_{\lambda} \sum_{\mu} g_{\lambda\mu} \eta_{\lambda} \eta_{\mu} = r^2 (= \text{const.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

represents a hypersphere with radius r .

In the system (η) the hyperplane τ obtains the equation

$$\sum_{\lambda=1}^n p_{\lambda} \xi_{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^n \left(\frac{p_{\lambda}}{h_{\lambda}} \right) \eta_{\lambda} = q_0,$$

or, putting

$$\frac{p_i}{h_i} = q_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\sum_{\lambda=1}^n q_{\lambda} \eta_{\lambda} = q_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

We next consider the distance of the point $S (\eta_i = 0)$ from this hyperplane, or, in other words, the radius r of that hypersphere (9) which touches the hyperplane (11).

Denoting by η'_i the coordinates of the point T' of contact, we have for the tangent hyperplane of T'

$$\sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu} g_{\lambda\mu} \eta'_{\mu} \right) \eta_{\lambda} = r^2.$$

Comparing this equation with (11), we obtain

$$\sum_{\mu} g_{k\mu} \eta'_{\mu} = \frac{r^2}{q_0} \cdot q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Putting

$$|g_{\lambda\mu}| \doteq G, \text{ (with minors } G_{ij}),$$

we derive from (12)

$$\eta'_i = \frac{r^2}{q_0} \sum_{\lambda} \frac{G_{\lambda i}}{G} \cdot q_{\lambda}.$$

So the condition, that the point $T'(\eta')$ lies on the hypersphere, furnishes the relation

$$\sum_{\rho} \sum_{\sigma} g_{\rho\sigma} \cdot \frac{r^4}{q_0^2 G^2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} G_{\lambda\rho} q_{\lambda} G_{\mu\sigma} q_{\mu} = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Introducing, for the sake of brevity, the symbol δ_{ij} , defined by

$$\delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{for } j \neq i, \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

we have

$$\sum_{\rho} g_{\rho\sigma} G_{\lambda\rho} = \delta_{\lambda\sigma} \cdot G, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

whereby (13) is transformed into

$$\frac{r^2}{q_0^2 G^2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\sigma} \delta_{\lambda\sigma} G q_{\lambda} G_{\mu\sigma} q_{\mu} = 1,$$

or

$$\frac{r^2}{G} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} G_{\lambda\mu} q_{\lambda} q_{\mu} = q_0^2,$$

or

$$r^2 = \frac{q_0^2}{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{G_{\lambda\mu}}{G} q_{\lambda} q_{\mu}}.$$

So we find for the square of the distance $r(m)$ between the point $S(m)$ and the hyperplane τ

$$r^2(m) = \frac{q_0^2(m)}{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{G_{\lambda\mu}}{G} q_{\lambda} q_{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

It is now easy to formulate the most natural principle of adjustment:

In isotropic space we postulate, that the mean square of the distance $r(m)$ shall be a minimum, or

$$\varphi \equiv \frac{[r^2(m)]}{N} \text{ minimum} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

In order to interpret this condition in the original data, we must return to the coordinates x_i (resp. ξ_i) and the coefficients f_{ij} . From (7) follows

$$F = h_1^2 h_2^2 \dots h_n^2 \cdot G, \quad F_{ij} = \frac{h_1^2 h_2^2 \dots h_n^2}{h_i h_j} \cdot G_{ij},$$

whence

$$\frac{G_{ij}}{G} = h_i h_j \cdot \frac{F_{ij}}{F}.$$

Thus, by (10),

$$\frac{G_{ij}}{G} q_i q_j = \frac{F_{ij}}{F} p_i p_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Moreover we have, by (3),

$$q_0 = p_0 + \sum_{\lambda} p_{\lambda} x_{\lambda} .$$

Putting finally

$$\frac{F_{ij}}{F} = a_{ij} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

whence

$$|a_{\lambda\mu}| = A = \frac{1}{F} \quad \left(\text{with minors } A_{ij} = \frac{f_{ij}}{F} \right) ,$$

we find for φ

$$\varphi = \frac{\frac{1}{N} [(p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)^2]}{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Our problem may therefore be formulated as follows:

To determine the parameters $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ of the hyperplane τ in such a way, that the function φ be a minimum.

Putting

$$\frac{[x_i]}{N} = \bar{x}_i, \quad x_i = \bar{x}_i + u_i \quad (\text{whence } [u_i] = 0) \quad i = 1, \dots, n, \quad . \quad (21)$$

the numerator of (20) passes into

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} [\{ (p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n) + (p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n) \}^2] = \\ & = (p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n)^2 + 2(p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n) \times \\ & \times \frac{1}{N} [p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n] + \frac{1}{N} [(p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n)^2] , \end{aligned}$$

or, by (21) : $[u_i] = 0$, into

$$(p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n [u_{\lambda} u_{\mu}] p_{\lambda} p_{\mu} .$$

We put

$$\frac{1}{N} [u_i u_j] = b_{ij} \quad , \quad B = |b_{\lambda\mu}| \quad (\text{with minors } B_{ij}) \quad . \quad . \quad (22)$$

moreover

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu} = \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu} = \beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

whence we may write for φ (20):

$$\varphi = \frac{(p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n)^2 + \beta}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

The condition φ minimum requires:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0.$$

Since neither α nor β contains the parameter p_0 , we have

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_0} = \frac{2(p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n)}{\alpha},$$

so that $\frac{\partial \varphi}{\partial p_0} = 0$ is equivalent to

$$p_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_n \bar{x}_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

This equation expresses that the "best" hyperplane τ must pass through the "mean" point $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Thus the form φ is reduced to

$$\varphi = \frac{\beta}{\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

where α and β are positive-definite quadratic functions of p_1, p_2, \dots, p_n .

From

$$\log \varphi = \log \beta - \log \alpha$$

ensues

$$\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p_i},$$

so that for the condition $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0$ can be written:

$$\frac{\frac{\partial \beta}{\partial p_i}}{\frac{\partial \alpha}{\partial p_i}} = \frac{\beta}{\alpha} = \varphi,$$

or, by

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p_i} = 2 \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda i} p_{\lambda}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial p_i} = 2 \sum_{\lambda=1}^n b_{\lambda i} p_{\lambda},$$

$$\frac{\sum_{\lambda} b_{\lambda i} p_{\lambda}}{\sum_{\lambda} a_{\lambda i} p_{\lambda}} = \varphi \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

or

$$\sum_i (b_{\lambda i} - \varphi a_{\lambda i}) p_{\lambda} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

process). Denoting the 1st, 2nd, ..., k^{th} emanant by $UC, U^2C, \dots U^kC$, we have:

$$\left. \begin{aligned} UC &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \\ U^2C &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\lambda\mu, \rho\sigma} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma} \\ &\vdots \\ U^n C &= n! A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

§ 2. Degree of Uncertainty of the parameters $p_0, p_1, p_2, \dots p_n$.

Our next step is to estimate the accuracy of the solution.

An alteration of the position of the observed points will cause a displacement of the best hyperplane τ . So we have to investigate the oscillations to which the parameters $p_0, p_1, p_2, \dots p_n$ are subject. The coefficients a_{ij} , being given a priori, are not affected by observational errors. So the uncertainty of the p_i is merely due to that of the quantities C_{ij} , these latter being functions of the quantities c_{ij} . From (28) ensues that the uncertainty of these c_{ij} depends only on that of the quantities b_{ij} and q_0 . Hence we must first determine the degree of uncertainty (error) of the quantities b_{ij} and of q_0 , which in its turn depends on the b_{ij} .

Operating with one variable only, the observed values must be adjusted to a "most probable" value (as a rule: the arithmetical mean). Calling this most probable value: the "solution-value", the difference between the observed value and the solution-value is called the apparent error, in distinction from the essentially unknown true error.

Likewise we shall, also in the present case, denote the coordinates $X_i^*(m)$ of the adjusted point $T(m)$ by: the "solution-values" of the coordinates $x_i(m)$, and the differences, viz. the quantities $\xi_i(m)$ will be called: the "apparent errors" of the coordinates of $S(m)$.

Next to these apparent errors of the coordinates $x_i(m)$ we consider the — essentially unknown — "true errors" $\Delta x_i(m)$. These true errors of the coordinates $x_i(m)$ are transmitted to the quantities $u_i(m)$ (defined by (21)) and likewise to the quantities $b_{ij} = \frac{1}{N} [u_i u_j]$; afterwards to q_0 and to the quantities c_{ij} and C_{ij} .

So we first proceed to the investigation of the true errors of the b_{ij} , and will, more particularly, try to determine the mean value $M(\Delta b_{ij} \Delta b_{kl})$ of the product of the true errors Δb_{ij} and Δb_{kl} .

As $\Delta x_i(m)$ is the true error of $x_i(m)$, we derive from

$$u_i(m) = x_i(m) - \bar{x}_i = \frac{-x_i(1) - x_i(2) - \dots + (N-1)x_i(m) - \dots - x_i(N)}{N}$$

the formula

$$\Delta u_i(m) = \frac{-\Delta x_i(1) - \Delta x_i(2) - \dots + (N-1)\Delta x_i(m) - \dots - \Delta x_i(N)}{N}. \quad (37)$$

From $b_{ij} = \frac{1}{N} [u_i u_j]$ ensues

$$N \triangle b_{ij} = [u_j \triangle u_i] + [u_i \triangle u_j] \quad , \quad N \triangle b_{kl} = [u_l \triangle u_k] + [u_k \triangle u_l],$$

whence

$$N^2 \triangle b_{ij} \triangle b_{kl} = [u_j \triangle u_i] [u_l \triangle u_k] + [u_j \triangle u_i] [u_k \triangle u_l] + [u_i \triangle u_j] [u_l \triangle u_k] + [u_i \triangle u_j] [u_k \triangle u_l]. \quad (38)$$

Considering the first term of the second member apart, we have:

$$[u_j \triangle u_i] [u_l \triangle u_k] = [u_j (\mu) u_i (\mu) \cdot \triangle u_i (\mu) \triangle u_k (\mu)] + [u_j (\mu) u_i (\nu) \cdot \triangle u_i (\mu) \triangle u_k (\nu)],$$

where the sum $[[\]]$ extends to the $N(N-1)$ terms in which $\nu \neq \mu$.

We must now occupy ourselves with the mean values of these expressions. Denoting the mean value of the quantity R by $M(R)$, and taking into account that the variations $\triangle u_i(m)$ are independent of the quantities $u_i(m)$ themselves (these latter were merely introduced for the purpose of calculation), we may write:

$$M([u_j \triangle u_i] [u_l \triangle u_k]) = M([u_j (\mu) \cdot u_i (\mu)]) \times M(\triangle u_i (\mu) \cdot \triangle u_k (\mu)) + M([u_j (\mu) \cdot u_i (\nu)]) \times M(\triangle u_i (\mu) \cdot \triangle u_k (\nu)).$$

From (21) and (22) ensues:

$$0 = [u_j (\mu)] [u_i (\mu)] = [u_j (\mu) \cdot u_i (\mu)] + [u_j (\mu) \cdot u_i (\nu)] = N b_{ji} + [u_j (\mu) \cdot u_i (\nu)],$$

whence

$$M([u_j (\mu) \cdot u_i (\nu)]) = -N \cdot M(b_{ji}).$$

Thus:

$$M([u_j \triangle u_i] [u_l \triangle u_k]) = N \cdot M(b_{ji}) \{M(\triangle u_i (\mu) \cdot \triangle u_k (\mu)) - M(\triangle u_i (\mu) \cdot \triangle u_k (\nu))\}. \quad (39)$$

From (37) follows:

$$\begin{aligned} \triangle u_i (1) \triangle u_k (1) &= \frac{(N-1) \triangle x_i (1) - \triangle x_i (2) - \dots - \triangle x_i (N)}{N} \times \\ &\quad \times \frac{(N-1) \triangle x_k (1) - \triangle x_k (2) - \dots - \triangle x_k (N)}{N} \\ &= \frac{(N-1)^2 \triangle x_i (1) \triangle x_k (1) + \triangle x_i (2) \triangle x_k (2) + \dots}{N^2} \\ &\quad + \frac{\triangle x_i (N) \triangle x_k (N) + [[R_{uv} \triangle x_i (\mu) \triangle x_k (\nu)]]}{N^2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \triangle u_i (1) \triangle u_k (2) &= \frac{(N-1) \triangle x_i (1) - \triangle x_i (2) - \triangle x_i (3) - \dots - \triangle x_i (N)}{N} \times \\ &\quad \times \frac{-\triangle x_k (1) + (N-1) \triangle x_k (2) - \triangle x_k (3) - \dots - \triangle x_k (N)}{N} \\ &= \frac{-(N-1) \triangle x_i (1) \triangle x_k (1) - (N-1) \triangle x_i (2) \triangle x_k (2) +}{N^2} \\ &\quad + \frac{\triangle x_i (3) \triangle x_k (3) + \dots + \triangle x_i (N) \triangle x_k (N) + [[S_{uv} \triangle x_i (\mu) \triangle x_k (\nu)]]}{N^2} \end{aligned}$$

As the law of movability is assumed to be the same for each point of the n -dimensional space, the expressions $M(\Delta x_i(1) \Delta x_k(1))$, $M(\Delta x_i(2) \Delta x_k(2))$, ... will be equal, and their common value will be denoted by $M(\Delta x_i \Delta x_k)$.

Since the points $S(m)$ are supposed to be observed independently, we have

$$M(\Delta x_i(\mu) \Delta x_k(\nu)) = 0 \quad (\text{also for } k = i).$$

So we obtain

$$M(\Delta u_i(1) \Delta u_k(1)) = \frac{(N-1)^2 + N - 1}{N^2} M(\Delta x_i \Delta x_k) = \frac{N-1}{N} M(\Delta x_i \Delta x_k),$$

$$M(\Delta u_i(1) \Delta u_k(2)) = \frac{-2(N-1) + N - 2}{N^2} M(\Delta x_i \Delta x_k) = -\frac{1}{N} M(\Delta x_i \Delta x_k),$$

or, in general,

$$M(\Delta u_i(\mu) \Delta u_k(\mu)) = \frac{N-1}{N} M(\Delta x_i \Delta x_k),$$

$$M(\Delta u_i(\mu) \Delta u_k(\nu)) = -\frac{1}{N} M(\Delta x_i \Delta x_k).$$

Hence the equation (39) passes into

$$M([u_j \Delta u_i] [u_l \Delta u_k]) = N M(b_{jl}) \times \left(\frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \right) M(\Delta x_i \Delta x_k),$$

or

$$M([u_j \Delta u_i] [u_l \Delta u_k]) = N \cdot M(b_{jl}) \cdot M(\Delta x_i \Delta x_k) \quad . \quad . \quad (40)$$

Therefore the equation (38) furnishes:

$$M(\Delta b_{ij} \Delta b_{kl}) = \frac{1}{N} \left\{ M(b_{jl}) M(\Delta x_i \Delta x_k) + M(b_{jk}) M(\Delta x_i \Delta x_l) + \right. \\ \left. + M(b_{il}) M(\Delta x_j \Delta x_k) + M(b_{ik}) M(\Delta x_j \Delta x_l) \right\} \quad (41)$$

Since the adjustment of the N points to the hyperplane τ begins only after the n^{th} point, so that only $N-n$ points require adjustment, we have:

$$M(\Delta x_i \Delta x_k) = \frac{[\xi_i \xi_k]}{N-n} = \frac{N M(\xi_i \xi_k)}{N-n}.$$

In this formula ξ_i appears as the apparent error, in distinction from the true error Δx_i .

Now we find for $M(\xi_i \xi_k)$ by the probability-formula (5):

$$M(\xi_i \xi_k) = \int \xi_i \xi_k dW = \left(\frac{\theta^n F}{\pi^n} \right)^{1/2} \int_{\xi_i=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\xi_n=-\infty}^{+\infty} \xi_i \xi_k e^{-\theta f} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

From

$$\int dW = \left(\frac{\theta^n F}{\pi^n} \right)^{1/2} \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\xi_n=-\infty}^{+\infty} e^{-\theta f} d\xi_1 \dots d\xi_n = 1$$

follows

$$I = \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\xi_n=-\infty}^{+\infty} e^{-\theta f} d\xi_1 \dots d\xi_n = \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^{n/2} \cdot F^{-1/2}.$$

By differentiating with respect to f_{ik} we get

$$\frac{\partial I}{\partial f_{ik}} = -\theta \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\xi_n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial f_{ik}} e^{-\theta f} d\xi_1 \dots d\xi_n = \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^{n/2} \times -\frac{1}{2} F^{-3/2} \times \frac{\partial F}{\partial f_{ik}}.$$

If, $k=i$, we have

$$\frac{\partial f}{\partial f_{ii}} = \xi_i^2, \quad \frac{\partial F}{\partial f_{ii}} = F_{ii}.$$

If $k \neq i$, we have, on account of the symmetry of f and F ($f_{ik} = f_{ki}$),

$$\frac{\partial f}{\partial f_{ik}} = 2 \xi_i \xi_k, \quad \frac{\partial F}{\partial f_{ik}} = 2 F_{ik}.$$

So we obtain in either case:

$$\theta \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\xi_n=-\infty}^{+\infty} \xi_i \xi_k e^{-\theta f} d\xi_1 \dots d\xi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^{n/2} \cdot F^{-3/2} \cdot F_{ik}$$

whence,

$$M(\xi_i \xi_k) = \left(\frac{\theta^n F}{\pi^n} \right)^{1/2} \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\xi_n=-\infty}^{+\infty} \xi_i \xi_k e^{-\theta f} d\xi_1 \dots d\xi_n = \frac{1}{2\theta} \cdot \frac{F_{ik}}{F}$$

or, by (15),

$$M(\xi_i \xi_k) = \frac{a_{ik}}{2\theta} \cdot \dots \dots \dots (42)$$

We can now find the value of θ , corresponding to the data.

From

$$q_0 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \xi_{\lambda}$$

we have

$$\begin{aligned} [q_0^2] &= \left[\sum_{\lambda} \sum_{\mu} p_{\lambda} p_{\mu} \xi_{\lambda} \xi_{\mu} \right] = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} p_{\lambda} p_{\mu} [\xi_{\lambda} \xi_{\mu}] = \\ &= N \sum_{\lambda} \sum_{\mu} p_{\lambda} p_{\mu} M(\xi_{\lambda} \xi_{\mu}) = N \sum_{\lambda} \sum_{\mu} p_{\lambda} p_{\mu} \frac{a_{\lambda\mu}}{2\theta}, \end{aligned}$$

or, by (23),

$$[q_0^2] = \frac{N}{2\theta} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} p_{\lambda} p_{\mu} = \frac{N\alpha}{2\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

For $[q_0^2]$ and α we must take here their solution-values. Then the equation (20) or $\varphi = \frac{[q_0^2]}{N\alpha}$, considered in its solutionary state, gives

$$\theta = \frac{1}{2\varphi_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

So (42) gives for the solution-value of $M(\xi_i \xi_k)$

$$M(\xi_i \xi_k) = \varphi_0 a_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

and

$$M(\Delta x_i \Delta x_k) = \frac{N}{N-n} \varphi_0 a_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Replacing in (41) the unknown values $M(b_{jl})$ etc. by the actually found values b_{jl} etc. we finally arrive at:

$$M(\Delta b_{ij} \Delta b_{kl}) = \frac{\varphi_0}{N-n} (a_{ik} b_{jl} + a_{jl} b_{ik} + a_{il} b_{kj} + a_{kj} b_{il}) \quad . \quad (47)$$

So we have obtained the general formula for the uncertainty of the quantities b_{ij} .

We now proceed to investigate the uncertainty of φ_0 .

From $C = |c_{\lambda\mu}| = |b_{i\mu} - \varphi_0 a_{i\mu}| = 0$ follows

$$\Delta C = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} \Delta c_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} \Delta b_{i\mu} - \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{i\mu} \cdot \Delta \varphi_0 = 0,$$

whence

$$UC \cdot \Delta \varphi_0 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} \Delta b_{i\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Thus:

$$UC \cdot M(\Delta \varphi_0 \Delta b_{ij}) = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} M(\Delta b_{ij} \Delta b_{i\mu}),$$

or, by (47)

$$\begin{aligned} UC \cdot M(\Delta \varphi_0 \Delta b_{ij}) &= \frac{\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{i\mu} (a_{i\lambda} b_{j\mu} + a_{j\mu} b_{i\lambda} + a_{i\mu} b_{\lambda j} + a_{\lambda j} b_{i\mu}) \\ &= \frac{\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{i\mu} \{a_{i\lambda} (c_{j\mu} + \varphi_0 a_{j\mu}) + a_{j\mu} (c_{i\lambda} + \varphi_0 a_{i\lambda}) + \\ &\quad + a_{i\mu} (c_{\lambda j} + \varphi_0 a_{\lambda j}) + a_{\lambda j} (c_{i\mu} + \varphi_0 a_{i\mu})\} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} UC \cdot M(\Delta \varphi_0 \Delta b_{ij}) &= \frac{\varphi_0}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} (c_{j\mu} a_{i\lambda} + c_{i\lambda} a_{j\mu} + c_{\lambda j} a_{i\mu} + c_{i\mu} a_{\lambda j}) + \\ &\quad + \frac{2\varphi_0^2}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} (a_{i\lambda} a_{j\mu} + a_{i\mu} a_{\lambda j}) \quad \left. \vphantom{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu}} \right\} \quad (49) \end{aligned}$$

Making use of the symbol δ_{ij} , introduced by (14):

$$\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \text{ for } j \neq i,$$

we have

$$\sum_{\mu} C_{\lambda\mu} c_{j\mu} = \delta_{\lambda j} C, \dots \dots \dots (50)$$

thus:

$$\begin{aligned} UC \cdot M(\Delta \varphi_0 \Delta b_{ij}) &= \frac{\varphi_0}{N-n} C (\sum_{\lambda} \delta_{\lambda j} a_{i\lambda} + \sum_{\mu} \delta_{i\mu} a_{j\mu} + \sum_{\mu} \delta_{j\mu} a_{i\mu} + \sum_{\lambda} \delta_{i\lambda} a_{j\lambda}) + \\ &\quad + \frac{2\varphi_0^2}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} (a_{i\lambda} a_{j\mu} + a_{i\mu} a_{j\lambda}) \\ &= \frac{4\varphi_0}{N-n} C a_{ij} + \frac{2\varphi_0^2}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} (a_{i\lambda} a_{j\mu} + a_{i\mu} a_{j\lambda}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or, on account of } C=0, \text{ and } \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{i\lambda} a_{j\mu} &= \sum_{\mu} \sum_{\lambda} C_{\mu\lambda} a_{i\mu} a_{j\lambda} = \\ = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{i\mu} a_{j\lambda}, \end{aligned}$$

$$UC \cdot M(\Delta \varphi_0 \Delta b_{ij}) = \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{i\mu} a_{j\lambda} \dots \dots (51)$$

Moreover, from (48) ensues:

$$UC \cdot M(\Delta \varphi_0^2) = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\rho\sigma} M(\Delta \varphi_0 \Delta b_{\rho\sigma}),$$

or, by (51),

$$UC \cdot M(\Delta \varphi_0^2) = \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \cdot \frac{1}{UC} \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\rho\sigma} C_{\lambda\mu} a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} \dots (52)$$

In reducing the second member of (52) and analogous sums, we may not make use of the particular circumstance, that $C=0$. On the contrary we must start from the general formula:

$$C_{ij} C_{kl} - C_{il} C_{kj} = C \cdot C_{ij,kl} = C \cdot C_{ji,lk} = C \cdot C_{il,kj}, \dots (53)$$

where $C_{ij,kl}$ means the minor of the element c_{kl} in the determinant C_{ij} , this latter not being symmetrical.

Applying (53), we may write:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\rho\sigma} C_{\lambda\mu} a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} (C_{\rho\mu} C_{\lambda\sigma} - C \cdot C_{\rho\mu,\lambda\sigma}) a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} = \\ &= \sum_{\rho} \sum_{\mu} C_{\rho\mu} a_{\rho\mu} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{\lambda\sigma} a_{\lambda\sigma} - C \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\rho\mu,\lambda\sigma} a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma}, \end{aligned}$$

or, by (36),

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{\rho\sigma} C_{\lambda\mu} a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} = (UC)^2 - C \cdot U^2 C \dots \dots (54)$$

In this final form, we may put $C=0$. Then from (52) we derive

$$M(\Delta \varphi_0^2) = \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \dots \dots \dots (55)$$

Hence the mean error of φ_0 amounts to

$$E(\varphi_0) = \sqrt{M(\Delta \varphi_0^2)} = \frac{2\varphi_0}{\sqrt{N-n}}. \quad (56)$$

We shall now compute $M(\Delta C_{ij} \Delta \varphi_0)$.

We have first:

$$\begin{aligned} M(\Delta c_{kl} \Delta \varphi_0) &= M(\Delta b_{kl} \Delta \varphi_0) - a_{kl} M(\Delta \varphi_0^2) = \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \left(\frac{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{k\lambda} a_{l\mu}}{UC} - a_{kl} \right), \quad (57) \end{aligned}$$

further:

$$\begin{aligned} M(\Delta C_{ij} \Delta \varphi_0) &= \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij, \rho\sigma} M(\Delta c_{\rho\sigma} \Delta \varphi_0) = \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{N-n} \left(\frac{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij, \rho\sigma} C_{\lambda\mu} a_{\rho\lambda} a_{\sigma\mu}}{UC} - \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{ij, \rho\sigma} a_{\rho\sigma} \right) \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \left\{ \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \frac{C_{ij} C_{\rho\sigma} - C_{i\sigma} C_{\rho j}}{C} C_{\lambda\mu} a_{\rho\lambda} a_{\sigma\mu} - UC \cdot UC_{ij} \right\} \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \left\{ \frac{C_{ij}}{C} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} (C_{\rho\mu} C_{j\sigma} - C \cdot C_{\rho\mu, \lambda\sigma}) a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{C} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} (C_{\lambda j} C_{\rho\mu} - C \cdot C_{\lambda j, \rho\mu}) a_{\rho\mu} a_{\lambda\sigma} - UC \cdot UC_{ij} \right\} \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \left\{ \frac{C_{ij}(UC)^2}{C} - C_{ij} U^2 C - \frac{UC}{C} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} C_{\lambda j} a_{\lambda\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} UC_{\lambda j} a_{\lambda\sigma} - UC \cdot UC_{ij} \right\} \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \left\{ \frac{C_{ij}(UC)^2}{C} - C_{ij} U^2 C - \right. \\ &\quad \left. - \frac{UC}{C} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} (C_{ij} C_{\lambda\sigma} - C \cdot C_{ij, \lambda\sigma}) a_{\lambda\sigma} + \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} UC_{\lambda j} a_{\lambda\sigma} - UC \cdot UC_{ij} \right\} \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \left\{ \frac{C_{ij}(UC)^2}{C} - C_{ij} U^2 C - \frac{C_{ij}(UC)^2}{C} + \right. \\ &\quad \left. + UC \cdot UC_{ij} + \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} UC_{\lambda j} a_{\lambda\sigma} - UC \cdot UC_{ij} \right\} \\ &= \frac{4\varphi_0^2}{(N-n)UC} \left\{ -C_{ij} \cdot U^2 C + \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} UC_{\lambda j} a_{\lambda\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Since $M(\Delta C_{ij} \Delta \varphi_0)$ must be symmetrical with respect to i and j , we have

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} U C_{ij} a_{\lambda\sigma} &= \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{j\sigma} U C_{ij} a_{\lambda\sigma} = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} C_{j\lambda} U C_{i\sigma} a_{\sigma\lambda} = \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{ij} U C_{i\sigma} a_{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} (C_{i\sigma} U C_{ij} + C_{ij} U C_{i\sigma}) a_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} U (C_{i\sigma} C_{ij}) \cdot a_{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{2} U \left\{ \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} (C_{ij} C_{\sigma\sigma} - C \cdot C_{ij, i\sigma}) a_{i\sigma} \right\} = \frac{1}{2} U \{ C_{ij} U C - C \cdot U C_{ij} \} \\ &= \frac{1}{2} C_{ij} \cdot U^2 C - \frac{1}{2} C \cdot U^2 C_{ij} \end{aligned}$$

or, by $C=0$,

$$\sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{i\sigma} U C_{ij} a_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} C_{ij} U^2 C.$$

Hence we find

$$M(\Delta C_{ij} \Delta \varphi_0) = \frac{-2\varphi_0^2}{N-n} \cdot \frac{U^2 C}{UC} \cdot C_{ij} \cdot \dots \dots \dots (58)$$

From

$$\Delta UC = \Delta \sum_{\lambda} \sum_{\mu} C_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} \Delta C_{\lambda\mu}$$

follows

$$\begin{aligned} M(\Delta UC \cdot \Delta \varphi_0) &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} M(\Delta C_{\lambda\mu} \Delta \varphi_0) = \\ &= \frac{-2\varphi_0^2}{N-n} \cdot \frac{U^2 C}{UC} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} = \frac{-2\varphi_0^2}{N-n} \cdot \frac{U^2 C}{UC} \cdot UC, \end{aligned}$$

thus

$$M(\Delta UC \cdot \Delta \varphi_0) = \frac{-2\varphi_0^2}{N-n} U^2 C \cdot \dots \dots \dots (59)$$

We next consider $M(\Delta c_{ij} \Delta c_{kl})$:

$$\begin{aligned} M(\Delta c_{ij} \Delta c_{kl}) &= M\{(\Delta b_{ij} - a_{ij} \Delta \varphi_0)(\Delta b_{kl} - a_{kl} \Delta \varphi_0)\} = \\ &= M(\Delta b_{ij} \Delta b_{kl}) - a_{ij} M(\Delta b_{kl} \Delta \varphi_0) - a_{kl} M(\Delta b_{ij} \Delta \varphi_0) + a_{ij} a_{kl} M(\Delta \varphi_0^2), \end{aligned}$$

or, by (47), (51) and (55),

$$\begin{aligned} M(\Delta c_{ij} \Delta c_{kl}) &= \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ (b_{ik} a_{jl} + b_{jl} a_{ik} + b_{il} a_{kj} + b_{kj} a_{il}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\varphi_0 a_{ij}}{UC} \sum_{\xi} \sum_{\gamma} C_{\xi\gamma} a_{\xi l} a_{k\gamma} - \frac{4\varphi_0 a_{kl}}{UC} \sum_{\xi} \sum_{\gamma} C_{\xi\gamma} a_{\xi j} a_{i\gamma} + 4\varphi_0 a_{ij} a_{kl} \right\} \cdot (60) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} M(\Delta c_{ij} \Delta c_{kl}) &= \frac{\varphi_0}{N-n} \left\{ (c_{ik} a_{jl} + c_{jl} a_{ik} + c_{il} a_{kj} + c_{kj} a_{il}) + \right. \\ &\quad \left. + 2\varphi_0 (a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{kj}) + 4\varphi_0 a_{ij} a_{kl} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\varphi_0}{UC} (a_{ij} \sum_{\xi} \sum_{\gamma} C_{\xi\gamma} a_{\xi l} a_{k\gamma} + a_{kl} \sum_{\xi} \sum_{\gamma} C_{\xi\gamma} a_{\xi j} a_{i\gamma}) \right\} \cdot (60') \end{aligned}$$

(To be continued).

Mathematics. — Over een bepaalde integraal met Besselsche functies.

Door J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. JAN DE VRIES).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

1. Bekend is de integraal van SONIN¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(xy \cos \varphi) I_\rho(xz \sin \varphi) \cos^{\nu+1} \varphi \sin^{\rho+1} \varphi d\varphi = \\ = \frac{y^\nu z^\rho}{x(\sqrt{y^2 + z^2})^{\nu+\rho+1}} I_{\nu+\rho+1}(x\sqrt{y^2 + z^2}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

welke geldt onder de voorwaarde, dat de reële gedeelten van ν en $\rho > -1$ zijn, of afgekort: $R(\nu) > -1$ en $R(\rho) > -1$.

De integraal is evenwel ook convergent, indien ν of ρ of beide *negatief geheel* zijn, in welke gevallen we hare waarde zullen bepalen.

Ter vereenvoudiging substitueeren we in (1) $x=1$, $\cos^2 \varphi = c$, waardoor ze overgaat in:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 I_\nu(y\sqrt{c}) I_\rho(z\sqrt{1-c}) c^{\frac{\nu}{2}} (1-c)^{\frac{\rho}{2}} dc = \\ = \frac{2 y^\nu z^\rho}{(\sqrt{y^2 + z^2})^{\nu+\rho+1}} I_{\nu+\rho+1}(\sqrt{y^2 + z^2}). \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

1°. Onderstellen we ν negatief geheel $= -a$, dan gelden, wegens de absolute en gelijknamige convergentie der oneindige reeksen, de volgende herleidingen:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{y}\right)^{-a} \left(\frac{2}{z}\right)^{\rho} \int_0^1 I_{-a}(y\sqrt{c}) I_\rho(z\sqrt{1-c}) c^{-\frac{a}{2}} (1-c)^{\frac{\rho}{2}} dc = \\ & = (-1)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+2a}}{n!(n+a)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(m+\rho+1)} \int_0^1 c^n (1-c)^{m+\rho} dc = \\ & = (-1)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+2a}}{(n+a)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!} \cdot \frac{1}{\Gamma(n+m+\rho+2)} = \end{aligned}$$

¹⁾ Zie o.a. NIELSEN, Handb. d. Th. der Cylinderfunktionen 1904, p. 181 (7).

$$\begin{aligned}
&= (-1)^a \left(\frac{y}{2}\right)^{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+\varrho+2)} \sum_{p=0}^s \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p)!} = \\
&= \sum_{s=a}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+\varrho-a+2)} \sum_{p=0}^{s-a} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+\varrho-a+2)} \sum_{p=0}^{s-a} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p)!} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+\varrho-a+2)} \left\{ \sum_{p=0}^s \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p)!} - \sum_{p=s-a+1}^s \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p)!} \right\} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+\varrho-a+2)} \left\{ \frac{1}{s!} \left(1 + \frac{z^2}{y^2}\right)^s - \sum_{p=0}^{a-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2s-2p}}{p!(s-p)!} \right\} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{2}\right)^{2s}}{s! \Gamma(s+\varrho-a+2)} - \sum_{p=0}^{a-1} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2p}}{p!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s-2p}}{(s-p)! \Gamma(s+\varrho-a+2)} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{2}\right)^{2s}}{s! \Gamma(s+\varrho-a+2)} - \sum_{p=0}^{a-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{y}{2}\right)^{2p}}{p!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}}{s! \Gamma(s+p+\varrho-a+2)},
\end{aligned}$$

zoodat we vinden onder de voorwaarden: a positief geheel (of nul) en $R(\varrho) > -1$ (de laatste wegens het invoeren van de waarde der Eulersche integraal tijdens de herleidingen):

$$\left. \begin{aligned}
&\left(\frac{2}{y}\right)^{-a} \left(\frac{2}{z}\right)^{\varrho} \int_0^1 I_{-a}(y\sqrt{c}) I_{\varrho}(z\sqrt{1-c}) c^{-\frac{a}{2}} (1-c)^{\frac{\varrho}{2}} dc = \\
&= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^{-a} \left(\frac{2}{z}\right)^{\varrho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{-a}(y \cos \varphi) I_{\varrho}(z \sin \varphi) \cos^{-a+1} \varphi \sin^{\varrho+1} \varphi d\varphi = \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{\varrho-a+1} I_{\varrho-a+1}(\sqrt{y^2+z^2}) - \\
&\quad - \left(\frac{2}{z}\right)^{\varrho-a+1} \sum_{p=0}^{a-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{y^2}{2z}\right)^p}{p!} I_{\varrho+p-a+1}(z).
\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

De waarde van deze integraal hebben we reeds vroeger langs anderen weg gevonden¹⁾.

¹⁾ Nieuw Archief voor Wiskunde (2) VII p. 178 (47).

2°. Indien ϱ negatief geheel $= -b$ is, voert de substitutie $c = 1 - \varepsilon$ tot:

$$\int_0^1 I_\nu(y\sqrt{c}) I_{-b}(z\sqrt{1-c}) c^{\frac{\nu}{2}} (1-c)^{-\frac{b}{2}} dc = \\ = \int_0^1 I_{-b}(z\sqrt{\varepsilon}) I_\nu(y\sqrt{1-\varepsilon}) \varepsilon^{-\frac{b}{2}} (1-\varepsilon)^{\frac{\nu}{2}} d\varepsilon,$$

zoodat de waarde van deze integraal onmiddellijk uit (2) volgt, nl.:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^1 I_\nu(y\sqrt{c}) I_{-b}(z\sqrt{1-c}) c^{\frac{\nu}{2}} (1-c)^{-\frac{b}{2}} dc = \\ & = 2 \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(y \cos \varphi) I_{-b}(z \sin \varphi) \cos^{\nu+1} \varphi \sin^{-b+1} \varphi d\varphi = \\ & = \left(\frac{2}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^{\nu-b+1} I_{\nu-b+1}(\sqrt{y^2 + z^2}) - \\ & \quad - \left(\frac{2}{y}\right)^{\nu-b+1} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} I_{\nu-b+1+p}(y), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

welke geldt onder de voorwaarden: b positief geheel (of nul) en $R(\nu) > -1$.

3°. Onderstellen we thans ν negatief geheel $= -a$ en ϱ negatief geheel $= -b$, dan gelden de volgende herleidingen:

$$\left(\frac{2}{y}\right)^{-a} \left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^1 I_{-a}(y\sqrt{c}) I_{-b}(z\sqrt{1-c}) c^{-\frac{a}{2}} (1-c)^{-\frac{b}{2}} dc = \\ = (-1)^{a+b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+2a}}{n!(n+a)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2b}}{m!(m+b)!} \int_0^1 c^n (-c)^m dc = \\ = (-1)^{a+b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+2a}}{(n+a)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2b}}{(m+b)!} \cdot \frac{1}{(n+m+1)!} = \\ = (-1)^{a+b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \sum_{p=0}^s \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2s-2p+2a} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+2b}}{(s-p+a)!(p+b)!} = \\ = (-1)^{a+b} \left(\frac{y}{2}\right)^{2a} \left(\frac{z}{2}\right)^{2b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s-2}}{s!} \sum_{p=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{(p+b)!(s-p+a-1)!} =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{a+b-1} \left(\frac{y}{2}\right)^{2a+2b-2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{s!} \sum_{p=0}^{s+b-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p+a+b-1)!} = \\
&= (-1)^{a+b-1} \left(\frac{y}{2}\right)^{2a+2b-2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{s!} \left\{ \sum_{p=0}^{s+a+b-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p+a+b-1)!} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{p=0}^{b-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p+a+b-1)!} - \sum_{p=s+b}^{s+a+b-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p+a+b-1)!} \right\} = \\
&= (-1)^{a+b-1} \left(\frac{y}{2}\right)^{2a+2b-2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s}}{s!} \left\{ \left(1 + \frac{z^2}{y^2}\right)^{s+a+b-1} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{p=0}^{b-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2p}}{p!(s-p+a+b-1)!} - \sum_{p=0}^{a-1} \frac{\left(\frac{z}{y}\right)^{2(s-p+a+b-1)}}{p!(s-p+a+b-1)!} \right\} = \\
&= (-1)^{a+b-1} \left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{2}\right)^{a+b-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{2}\right)^{2s+a+b-1}}{s!(s+a+b-1)!} + \\
&\quad + (-1)^{a+b} \left(\frac{y}{2}\right)^{a+b-1} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{\left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^{2s+a+b-p-1}}{p!(s+a+b-p-1)!} + \\
&\quad + (-1)^{a+b} \left(\frac{z}{2}\right)^{a+b-1} \sum_{p=0}^{a-1} \frac{\left(\frac{y^2}{2z}\right)^p}{p!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+a+b-p-1}}{p!(s+a+b-p-1)!},
\end{aligned}$$

zoodat we vinden onder de voorwaarde: a en b positief geheel (of nul):

$$\left. \begin{aligned}
&\left(\frac{2}{y}\right)^{-a} \left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^1 I_{-a}(y\sqrt{c}) I_{-b}(z\sqrt{1-c}) c^{-\frac{a}{2}} (1-c)^{-\frac{b}{2}} dc = \\
&= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^{-a} \left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{-a}(y \cos \varphi) I_{-b}(z \sin \varphi) \cos^{-a+1} \varphi \sin^{-b+1} \varphi d\varphi = \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{1-a-b} I_{1-a-b}(\sqrt{y^2+z^2}) - \\
&\quad - \left(\frac{2}{y}\right)^{1-a-b} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} I_{p+1-a-b}(y) - \\
&\quad - \left(\frac{2}{z}\right)^{1-a-b} \sum_{p=0}^{a-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{y^2}{2z}\right)^p}{p!} I_{p+1-a-b}(z).
\end{aligned} \right\} \cdot (4)$$

2. Een belangrijke toepassing is van de voorgaande integralen te maken in verband met de bekende betrekking:

$$I_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ y^n + \frac{(-1)^n}{y^n} \right\} I_n(z) = e^{\frac{z}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^n I_n(z). \quad (a)$$

1°. Stellen we hiertoe in (1a) $\nu = 0$, daarna $\nu = n$, eveneens in (2), na vermenigvuldiging van beide leden met $\left(\frac{2}{y}\right)^a$, $a = n$, dan voert sommatie, waarbij n verandert van 1 tot ∞ , tot:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{z}\right)^{\rho} \int_0^1 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\sqrt{c})^n I_n(y\sqrt{c}) \right\} I_{\rho}(z\sqrt{1-c}) (1-c)^{\frac{\rho}{2}} dc = \\ = \left(\frac{2}{y}\right)^{\rho+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{n+\rho+1} I_{n+\rho+1}(\sqrt{y^2+z^2}) - \\ - \left(\frac{2}{y}\right)^{\rho+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{z}\right)^{\rho-n+1} \frac{(-1)^n \left(\frac{y^2}{2z}\right)^{\rho}}{n!} I_{\rho+\rho-n+1}(z), \end{aligned}$$

waarvan het eerste lid herleid kan worden met behulp van (a), terwijl de laatste reeks van het tweede lid gebracht kan worden in den vorm:

$$\left(\frac{2}{y}\right) \left(\frac{2}{z}\right)^{\rho} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^s}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{y}\right)^m I_{\rho-m}(z) = \left(\frac{2}{y}\right)^{\rho+1} e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{z}\right)^{\rho-m} I_{\rho-m}(z),$$

zoodat na eenige herleiding onder de voorwaarde $R(\varrho) > -1$ geldt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{z}\right)^{\rho} \int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} I_{\rho}(z\sqrt{c}) c^{\frac{\rho}{2}} dc = \\ = \left(\frac{2}{y}\right)^{\rho+1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{n+\rho+1} I_{n+\rho+1}(\sqrt{y^2+z^2}) - \right. \\ \left. - e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{z}\right)^{\rho-m} I_{\rho-m}(z) \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Indien ϱ positief geheel of nul $= a$ is, kan in verband met (a) nog de volgende herleiding plaats hebben:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{n+a+1} I_{n+a+1}(\sqrt{y^2+z^2}) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^n I_n(\sqrt{y^2+z^2}) = e^{-\frac{z^2}{2y}}, \end{aligned}$$

zoodat (5) dan na eenige herleiding voor a positief geheel of nul overgaat in:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{2}{z}\right)^a \int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} I_a(z\sqrt{c}) c^{\frac{a}{2}} dc = \\ & = \left(\frac{2}{y}\right)^{a+1} \left\{ e^{-\frac{z^2}{2y}} - e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^a \left(\frac{y}{z}\right)^m I_m(z) - e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{y}\right)^m I_m(z) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Substitutie van $z=0$ in (5) en (6) voert tot de bijzondere gevallen, die we reeds eerder hebben gevonden¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} c^{\rho} dc = \Gamma(\rho+1) \left(\frac{2}{y}\right)^{\rho+1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{n+\rho+1}(y) - \right. \\ & \quad \left. - e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\rho-m}}{\Gamma(\rho-m+1)} \right\}, \quad (R_{(\rho)} > -1). \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} c^a dc = a! \left(\frac{2}{y}\right)^{a+1} \left\{ 1 - e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^a \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^m}{m!} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} (a \text{ positief geheel} \\ \text{of nul}). \end{array} \right\} \quad (6a)$$

2°. Stellen we evenzoo in (3), na vermenigvuldiging van beide leden met $\left(\frac{y}{2}\right)^{\nu}$, $\nu=0$ en daarna $\nu=n$, eveneens in (4), na vermenigvuldiging van beide leden met $\left(\frac{2}{y}\right)^a$, $a=n$, dan voert sommatie, waarbij n verandert van 1 tot ∞ , in verband met (a), tot:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} I_{-b}(z\sqrt{c}) c^{-\frac{b}{2}} dc = \\ & = \left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^{n-b+1} I_{n-b+1}(\sqrt{y^2+z^2}) - \\ & - \left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} I_{p+n-b+1}(y) - \\ & - \left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} I_{p-n-b+1}(y) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{y}\right)^n \left(\frac{2}{z}\right)^{1-n-b} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{y^2}{2z}\right)^p}{p!} I_{p-n-b+1}(z); \end{aligned}$$

¹⁾ Nieuw Archief voor Wiskunde (2) VI p. 372 en 373, (7) en (8).

daar b positief geheel of nul is, gaat de eerste term van het tweede lid wegens (a) over in $e^{-\frac{z^2}{2y}}$, terwijl de volgende twee termen zich als volgt laten samenvatten op grond van (a):

$$\left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} \left\{ I_{p-b+1}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{p+n-b+1}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{p-n-b+1}(y) \right\} = \\ = \left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!};$$

tenslotte kan de laatste reeks van het tweede lid gebracht worden in de gedaante:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{y}{2}\right)^s}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{y}\right)^{m+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+b} I_{-m-b}(z) = \\ = \left(\frac{2}{y}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^b e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{y}\right)^m I_{-m-b}(z) = \left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=b}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{y}\right)^m I_m(z).$$

We komen derhalve tot de volgende betrekking, die geldt onder de voorwaarde b positief geheel of nul:

$$\left(\frac{2}{z}\right)^{-b} \int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} I_{-b}(z\sqrt{c}) c^{-\frac{b}{2}} dc = \\ = \left(\frac{y}{2}\right)^{b-1} \left\{ e^{-\frac{z^2}{2y}} - \sum_{p=0}^{b-1} \frac{(-1)^p \left(\frac{z^2}{2y}\right)^p}{p!} - e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=b}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{y}\right)^m I_m(z) \right\}, \quad (7)$$

welke zich voor $z=0$ behoorlijk herleidt tot:

$$\int_0^1 e^{-\frac{y}{2}c} dc = \frac{2}{y} \left(1 - e^{-\frac{y}{2}}\right).$$

RÉSUMÉ.

Dans cette note il s'agit d'une extension de l'intégrale de SONIN, exprimée par (1), connue dans la théorie des fonctions de BESSEL, où ν et ϱ sont des nombres arbitraires, dont la partie réelle est plus grande que -1 . Dans la formule (2) ν est remplacé par $-a$, dans la formule (3) ϱ par $-b$, et dans la formule (4) ν et ϱ sont remplacés par $-a$ et $-b$, où a et b sont des nombres entiers positifs quelconques.

Il suit encore une application importante de ces intégrales en vue de la relation (a), qui conduit à l'intégrale (5), où ϱ est un nombre arbitraire, dont la partie réelle est plus grande que -1 , et aux intégrales (6) et (7), où a et b sont des nombres entiers positifs quelconques.

Physics. — *Quellungsdruck und Osmotischer Druck.* Von H. HULSHOF.
(Communicated by Prof. P. ZEEMAN.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Bei der Berührung einer Flüssigkeit und einer festen Wand entstehen zwei Grenzschichten. In der beweglichen Grenzschicht der Flüssigkeit herrscht, infolge der Molekularattraktion, in der Richtung dieser Schicht (also tangentiell) entweder eine Spannung, welche die Oberfläche zu verkleinern sucht oder ein Druck, der diese Oberfläche vergrössern will. Wir definieren die Molekularattraktion (den Molekulardruck) pro Flächenelement do als die Kraft, womit aller Stoff an der einen Seite der ebenen Fläche, worin do gelegen ist, die stoffliche Säule, welche do als Grundfläche hat und an der anderen Seite dieser Fläche gelegen ist und senkrecht hierauf ruht, in der Richtung senkrecht auf diese Fläche anzieht.

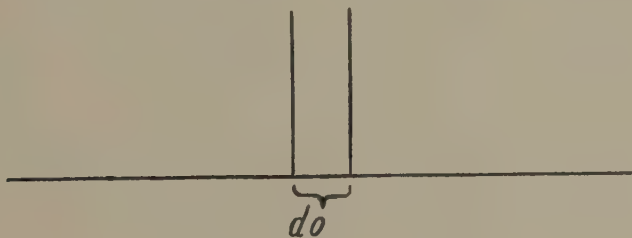


Fig. 1.

In einem Punkt der Grenzschicht hat im allgemeinen die Molekularattraktion in der Richtung dieser Schicht einen anderen Wert als in der Richtung senkrecht darauf. Wählen wir den Fall dass flüssiges Wasser mit einer Glaswand in Berührung ist. Da die Attraktion von Glas und Wasser in diesen Umständen grösser ist als die Attraktion von Wasser auf Wasser, wird die Attraktion M_1 , welche die Säule a normal auf die Glaswand erfährt, grösser als die Attraktion M_2 sein, welche eine Säule b in tangentieller Richtung erfährt. Für die Wasserteilchen in der unmittelbaren Nähe der Glaswand ist sonach $M_1 > M_2$. Für die etwas weiter von der Wand gelegenen Wasserteilchen wird gleichfalls gelten dass $M_1 > M_2$, wo nicht durch direkten Einfluss der Glaswand dann doch infolge der Dichtigkeitsabnahme des Wassers. Setzen wir weiter dass in irgend einem Punkt die Summe des Drucks und des Molekulardrucks in allen Richtungen denselben Wert hat und nennen wir den Druck im Wasser normal auf die Glaswand p_1 und den tangentiellen Druck p_2 , dann gilt $p_1 + M_1 = p_2 + M_2$. In den

verschiedenen Schichten, woraus die Grenzschicht besteht, wird der Druck normal auf diese Schichten p_1 überall derselbe sein und zwar der Druck,

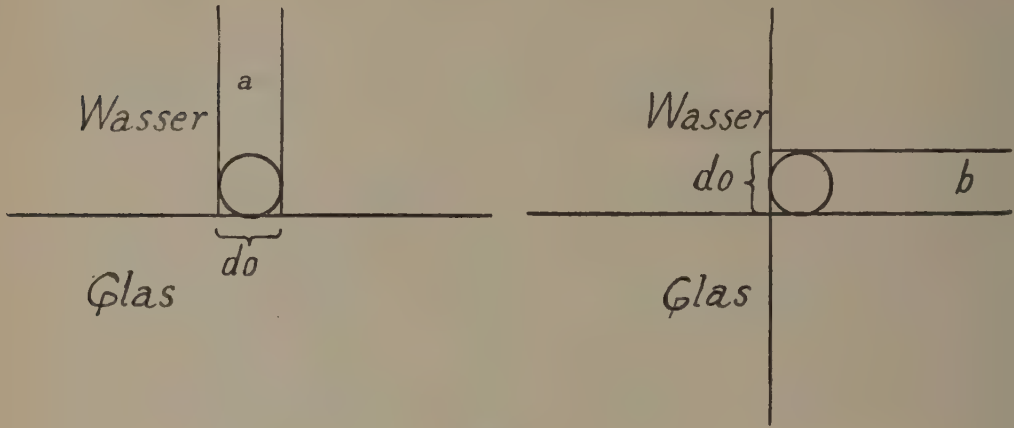


Fig. 2.

der in der an die Grenzschicht grenzenden homogenen Phase im Wasser herrscht, während der tangentielle Druck p_2 in der Richtung dieser Schichten zunimmt von dem Wert $p_2 = p_1$ in der homogenen Phase bis zu einem Maximumwert p_{2G} in den äussersten Wasserschicht an der Wand. Dieser Maximumwert kann sehr gross sein z.B. wohl 100 Atm., wenn $p_1 = 1$ Atm. Dennoch wird der Wert des ganzen Grenzschichtdruckes

$\delta = \int (p_2 - p_1) dh$, genommen über eine Fläche mit einer Dimension der Länge-einheit in der Richtung der Schicht und mit einer Höhe, der Dicke der Grenzschicht gleich, wegen der geringen Dicke der Grenzschicht nur einen Wert wie die Oberflächenspannung σ haben, mit welcher er auch die Dimension gemein hat. Ist $\delta > \sigma$, dann wird die Flüssigkeit sich über die feste Wand ausbreiten (völlige Benetzung). Ist δ positiv aber kleiner als σ , dann erhält man teilweise Benetzung; ist δ negativ, herrscht also in der Grenzschicht an der festen Wand eine Spannung, dann sagt man dass die feste Wand nicht benetzt wird. Hierbei ist der Einfluss der Grenzschicht des Flüssigkeitsdampfes an der festen Wand vernachlässigt und wird angenommen, dass keine Luft da war. Alle Punkte in der Flüssigkeit in der Nähe der Wand, wo es einen Unterschied zwischen M_2 und M_1 oder zwischen p_2 und p_1 gibt, gehören zur Grenzschicht. Diese Schicht kann sehr verschiedene Dicke haben, abhängig von der Art der Molekularkräfte der Wand und der Flüssigkeit und von der Temperatur. Theoretisch ist die Dicke sehr gross, praktisch ist sie sehr klein. Veränderung der Dichtigkeit der Flüssigkeit in der Nähe der Wand wird weiter nicht berücksichtigt. Angenommen wird dass, wenn von der Umgebung worin eine Flüssigkeit eine feste Wand benetzt, der Druck um einen bestimmten Betrag

zunimmt, sowohl der Druck p_1 wie der Druck p_2 um diesen Betrag zunehmen werden. Der Krümmung von Grenzschichtenflächen wird nicht Rechnung getragen.

Thermodynamisches Potential in einer Grenzschicht. Wenn man eine Flüssigkeit in einem Gefäss hat in Berührung mit seinem gesättigten Dampf, lehrt die Thermodynamik, dass für das Gleichgewicht notwendig ist, dass die sämtliche freie Energie des Stoffes im abgeschlossenen Gefäss

$\int (\varepsilon - T\eta - M\mu)\varrho dh$ ein Minimum ist. Wenn dieser Forderung Genüge geleistet ist, hat $(\varepsilon - T\eta - M\mu)\varrho$ gerade den Wert des tangentiellen Druckes mit entgegengesetztem Zeichen $-p_2$, sodass, da $\varrho = \frac{1}{v}$,

$\varepsilon - T\eta + p_2v = M\mu$. Diese Beziehung gilt allgemein, nicht nur in der Uebergangsschicht Flüssigkeit-Dampf, sondern auch in den Grenzschichten Flüssigkeit-fester Wand und Dampf-fester Wand. In den homogenen Flüssigkeit- und Dampfphasen, wo $p_2 = p_1$, geht sie über in den gewöhnlichen Ausdruck des thermodynamischen Potentials.

Quellung oder Imbibition. In sehr engen Oeffnungen, deren Weite geringer als die doppelte Dicke der Grenzschicht ist, (Porione), wird, wenn die Wände jener Oeffnungen von einer Flüssigkeit benetzt werden, diese Flüssigkeit, falls sie zugelassen wird, mit grosser Kraft vorwärts dringen, dank dem tangentiellen Druck, der nicht aufgehalten wird von einer auftretenden Oberflächenspannung einer freien Flüssigkeitsoberfläche, weil diese nicht entstehen kann. Jedoch wird auch seitwärts die hereindringende Flüssigkeit einen grossen Druck auf die Wände üben (Quellungsdruck). Dieser ist die Folge des tangentiellen Drucks und hängt eng damit zusammen. Die Quellung ist eine reversible Erscheinung.

Denken wir uns in einer Wasserumgebung zwei grosse, viereckige gleiche, völlig flache Glasplatten, parallel und gerade vertikal über einander aufgestellt. Es sei die vertikale Entfernung dieser Platten $2h_1$, während h_1 grösser ist als was wir praktisch rechnen die Dicke der Grenzschicht des Wassers an der Glaswand zu sein. Das die Platten umgebende Wasser steht unter einem Druck Null. Wir haben also überall um die Glasplatten im Wasser eine vollständige Grenzschicht (freie Grenzschicht), worin der normale Druck Null ist und der tangentielle Druck abnimmt von p_{2G} unmittelbar in der Nähe der Glaswand bis zu Null in der homogenen Phase. Den tangentiellen Druck in einer Entfernung a von der Glaswand setzen wir p_{2a} . Das thermodynamische Potential $\varepsilon - T\eta + p_2v$ hat überall im Wasser und in allen Schichten der Grenzschicht denselben Wert. Wenn wir nun die zwei Platten die eine der anderen zu bewegen, während wir sie immer einander parallel halten, so wird im Wasser zwischen den Platten der normale Druck zunehmen. Dieser normale Druck, den wir nun, da der Druck ausserhalb der Platten Null ist, den Quellungsdruck nennen

werden, wird, wenn die Platten sich einander nähern, von Null bis p_{2G} zunehmen und zwar derart, dass bei einer gegenseitigen Entfernung der Platten von $2h$, der Quellungsdruck gerade den Wert haben wird vom tangentiellen Druck p_2 der freien Grenzschicht in einer Entfernung h von der Wand. Während, indem die Platten sich gegenseitig nähern, der Quellungsdruck zunimmt, behalten in dem Raum zwischen den Platten die tangentiellen Drücke in derselben Entfernung von den Platten immer ihren nämlichen Wert. Für das Gleichgewicht mit der Grenzschicht an der Aussenseite der Platten ist dies notwendig. Das thermodynamische Potential bleibt gleichfalls konstant. Bringen wir die ganze Wassermasse, worin die Platten sich befinden, unter den Druck dp , so wird überall und in allen Richtungen der Druck um den Betrag dp steigen und das Potential wird überall mit dem Betrag $vd p = vdp_2$ zunehmen. Macht man beides zugleich, erhöht man den Quellungsdruck um dz , indem man die Platten einander näher bringt und erhöht man den Druck des Ganzen um dp , so wird zwischen den Platten der normale Druck um $dp + dz$ zunehmen; die Druckvermehrung dp wird überall und in allen Richtungen auftreten und sie wird überall im Wasser das Potential um $vd p = vdp_2$ vermehren. Die Druckerhöhung dz wird den tangentiellen Druck nicht beeinflussen und sie wird das Potential nicht verändern. Es erscheint mir wichtig nachdrücklichst hierauf hinzuweisen.

Nehmen wir ein mit Wasser gefülltes Gefäss, worin sich viele Teilchen befinden, welche, da im sie direkt umgebenden Wasser der tangentielle Druck grösser als der normale ist, einen Quellungsdruck im Wasser verursachen. Steht die Lösung unter einem konstant bleibenden Druck, während die Wirkung der Schwerkraft aufgehoben erscheint, und vermehren wir nun diese Anzahl Teilchen, so wird im Wasser des Gefässes der Quellungsdruck zunehmen, aber weil wir den Gesamtdruck konstant lassen wird der Druck, der sich überall und in allen Richtungen gleichmässig fühlbar macht, um denselben Betrag abnehmen als womit der Quellungsdruck zugenommen hat. Die Abnahme des Druckes, die sich überall und in allen Richtungen gleichmässig fühlbar macht, wird den tangentiellen Druck und das Potential des Wassers vermindern.

Dass in der Tat der Quellungsdruck, beim abnehmen der senkrechten Entfernung der Platten, alle Werte des tangentiellen Drucks an der freien Wand durchläuft und uns diesen als Function der Entfernung bis zur Wand kennen lässt, lehrt uns folgende Erwägung. Wir machen mit Hilfe

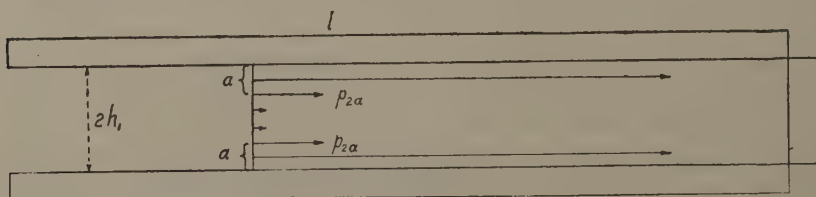


Fig. 3.

von drei emporstehenden Glaswänden von unseren zwei parallelen Platten einen an einer Seite offenen Behälter mit rechteckigen Wänden. Mittels eines Stempels mit den Dimensionen $2h_1$ und b , den wir parallel zum Boden des Behälters bleibend verschieben, drücken wir das Wasser aus dem

Behälter. Dies kostet uns eine Arbeit $2lb \int_0^{h_1} p_2 dh = 2lb\delta$. Wir hätten aber

auch das Wasser aus dem Behälter entfernen können, indem wir unsere Glasplatten näher zu einander gebracht hätten, sie dabei parallel zu einander haltend z.B. über eine Strecke $2(h_1 - a)$ und indem wir darauf mit einem kleineren Stempel, mit den Dimensionen $2a$ und b , das im Behälter übrig gebliebene Wasser entfernt hätten; letzteres auf Kosten einer von

uns zu leistenden Arbeit $2lb \int_0^a p_2 dh$. Es kostet keine Arbeit die Platten

in ihren ursprünglichen Stand zurückzubringen. Ob wir den Behälter auf die erste oder auf die zweite Weise leeren, in beiden Fällen war die zu leistende Arbeit gleich gross, weil die Zustandsveränderungen isotherm und umkehrbar verliefen. Aus der Erwägung dass wir a ändern können, geht notwendig hervor dass $2lb p_{2a} da = lb \pi da$, falls π der Quellungsdruck ist wenn die Entfernung der Platten $2a$ beträgt. Der Quellungsdruck π hat also, wenn die Entfernung der Platten $2h$ ist, den Wert von p_2 in der Entfernung h von der Wand in einer freien Grenzschicht.

Osmotischer Druck ist Quellungsdruck. Denken wir uns, während die Wirkung der Schwere aufgehoben ist, in einem gläsernen Gefäss A , das überall gleich weit und mit Wasser gefüllt ist, eine Anzahl kleiner Teilchen. Von diesen Teilchen möge gelten, dass sie im sie umgebenden Wasser einen tangentiellen Druck grösser als den normalen hervorrufen. Zwischen den Teilchen gegenseitig und zwischen den Teilchen und der Wand will ein Quellungsdruck herrschen, der unmittelbar in der Nähe der Wand und der Teilchen normal auf diese gerichtet sein will. Die Teilchen werden infolge dieses Quellungsdruckes sich gleichmässig über das Wasser zu verteilen trachten; wenn sie sich gegenseitig oder der Wand nähern, nimmt zwischen den Teilchen und der Wand oder zwischen den Teilchen gegenseitig der Quellungsdruck zu. Denken wir uns neben diesem Gefäss A ein Gefäss B , welches dem ersten völlig gleich ist und auch eine gleich grosse Anzahl der gewählten Teilchen enthält. Die Flüssigkeit in beiden Gefässen steht unter dem konstanten Druck p_1 . Bringen wir nun noch einige Teilchen ins Gefäss A , so werden in demselben die Teilchen näher zu einander kommen und der Quellungsdruck z wird sonach um einen Betrag dz zunehmen, aber der konstante Druck p_1 bleibt unverändert, folglich hat der Druck $p_1 - z$, der sich überall und in allen Richtungen gleich stark empfinden lässt, gleichzeitig um diesen Betrag dz abgenommen.

Somit hat auch der tangentielle Druck an der Glaswand um diesen Betrag abgenommen. Wenn wir die beiden Gefässe semipermeabel mit einander in Verbindung brächten, würde ein Druckgefälle von B nach A im Porion auftreten und das Wasser würde von B nach A fliessen bis die Konzentration in beiden Gefässen dieselbe geworden wäre, oder, wenn wir verhin- derten dass die Flüssigkeit im Gefäss ein grösseres Volumen einnehmen sollte, bis durch Aufstauung im Porion der tangentielle Druck an der Wand des Gefässes A wieder um dz zugenommen hätte und mithin der Gesamt- druck unter dem die Flüssigkeit im Gefäss A steht, $p_1 + dz$ geworden wäre. Thermodynamische Erwägungen lehren uns, wenn wir uns auf sehr verdünnte Lösungen beschränken, wie man eine Beziehung zwischen der Druckveränderung und der Wasserquantität finden kann, die wir der Lösung entzogen haben, indem wir ins Gefäss A noch einige Teilchen brachten und auf diese Weise das Mischverhältniss änderten. Die VAN DER WAALS'sche Theorie gibt für den Wert des thermodynamischen

Potentials des Lösemittels $M\mu = -MRT \log(1-x) + \mu_x - x \left(\frac{d\mu_x}{dx} \right)_{p_1}$,

worin $\mu_x = p_1 v - \int p dv = p_1 v - MRT \log(v - b_x) - \frac{a_x}{v}$. Hieraus folgt

$\left(\frac{dM\mu}{dx} \right)_{p_1} = -\frac{MRT}{1-x} - x \left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2} \right)_{p_1}$, wofür wir schreiben dürfen $-MRT$,

weil wir uns auf sehr verdünnte Lösungen beschränken. Und weiter

$\left(\frac{dM\mu}{dp_1} \right)_x = v - x \left(\frac{dv}{dx} \right)_{p_1}$, wofür wir aus demselben Grund v schreiben

können, sodass wir annehmen $dM\mu = -MRT dx + v dp_1$. ¹⁾

Wenn wir einige Wasserteilchen, $M dx$ Gramm, aus unserer Lösung durch eine gleiche Anzahl der gewählten Teilchen, $M_1 dx$ Gramm, ersetzen, wird das Potential des Wassers um einen Betrag $MRT dx$ vermindern. Es tut nichts zur Sache ob unsere Teilchen Ionen oder Zuckermoleküle oder Teilchen von Perrin sind; der Ausdruck $MRT dx$ bezieht sich nur darauf, dass keine Quantität $M dx$ Wasser mehr da ist. Weil wir den Druck p_1 konstant hielten, ist $-MRT dx$ die ganze Aenderung des thermodyna- mischen Potentials, ist doch $dp_1 = 0$. Indem wir aber vom Quellungsdruck Gebrauch machen, können wir für diese Aenderung des Potentials auch schreiben $-v dz = v dp_2$, nicht weil der Quellungsdruck um dz zugenom- men hat, sondern weil $p_1 = z$, der Druck, der sich überall und in jeder Richtung gleichmässig empfinden lässt, um dz abgenommen hat. Letzterer Druck beeinflusst das Potential; alle tangentielle Drucke in unserem Gefäss sind um $-dz$ verändert, sodass $-v dz = v dp_2 = -MRT dx$, worin also dz die Zunahme des Quellungsdruckes bezeichnet. Wir finden sonach dass $dz = \frac{MRT dx}{v}$ d.h. indem wir $M dx$ Gramm Wasser durch $M_1 dx$ Gramm des aufgelösten Stoffes ersetzen, hat der Quellungsdruck.

¹⁾ G. HONDIUS BOLDINGH, Diss., Amsterdam 1893.

während der äussere Druck p_1 noch stets konstant blieb, mit $\frac{MRT dx}{v}$

zugenommen. Bringen wir nun die semipermeable Verbindung mit dem Gefäss B an, während wir nicht gestatten, dass das Volumen vom Inhalt des Gefässes A zunimmt, so nehmen durch Aufstauung im Porion alle tangentiellen Drucke, auch der Druck, der sich überall und in jeder Richtung gleich stark empfinden lässt, während der Quellsungsdruck seinen Wert $z + dz$ immerfort behält, um dz zu. Der Druck, unter welchen der Inhalt des Gefässes A gerät, wird $p_1 + dz$. Diesen letzten Druck dz nennt man den osmotischen Druck. Er ist in der Tat die Zunahme des Quellsungsdrucks; der Druck $p_1 - z$ hat seinen alten Wert wieder bekommen. Auch das Potential hat seinen alten Wert wieder. Die Thermodynamik lehrt dass in diesem Fall $dM\mu = -MRT dx + vdp_1 = 0$. Dieser dp_1 ist unser dz . Wir sehen also deutlich, dass der osmotische Druck nichts anders als die Differenz der Quellsungsdrücke zu beiden Seiten des Porions ist. Hiermit ist m.E. erklärt, dass, was wir gewöhnlich den osmotischen Druck einer Lösung nennen, nichts anders als der Quellsungsdruck ist. Wir können die richtige Formel für den osmotischen Druck auch herleiten, indem wir uns auf die Aenderung des tangentiellen Drucks an der Wand des Gefässes A beschränken, wo wir dann reines Wasser zu haben annehmen, weil der aufgelöste Stoff nicht zur Wand gelangt¹⁾. Die Einführung des Quellsungsdrucks bestätigt die Richtigkeit der Annahme, vertieft zugleich unsere Einsicht ins Wesen dieses Druckes. Es ist für beide Behandlungsweisen notwendig die Anisotropie des Drucks anzunehmen.

Falls wir auf eine Zuckerlösung mittelst einer semipermeablen Wand einen Druck ausüben und isotherm Wasser ausspressen, so nimmt der Quellsungsdruck zu; der Druck, der sich überall und in jeder Richtung in gleich starken Maasse fühlbar macht — wir nehmen an, dass die Schwere aufgehoben ist — so wohl wie die tangentiellen Drucke an den Wänden entlang und um die Zuckerteilchen herum und zugleich auch das thermodynamische Potential, sie bleiben alle konstant.

Hat man eine Zuckerlösung, deren Quellsungsdruck 8 Atm. ist unter dem Druck von 1 Atm. in einem offenen Gefäss und üben wir nun auf die Lösung ausserdem einen Druck von 7 Atm. aus, sodass sie unter einem äusseren Druck von 8 Atm. gelangt, so wird der Quellsungsdruck im Gefäss mit dem äusseren Druck im Gleichgewicht sein. Der Druck, der sich überall und in jeder Richtung gleich stark fühlbar macht, ist — von der Wirkung der Schwere abgesehen — Null. Letzterer wird, wenn wir den Druck von 7 Atm. aufheben, negativ werden (—7 Atm.); wir bekommen dann in dem Gefäss die Superposition dieses Druckes und des Quellsungsdruckes. Dieser Quellsungsdruck bleibt bestehen; er hat einen mittleren Wert von 8 Atm.

Es soll nachdrücklich darauf hingewiesen werden, dass in unserem

¹⁾ H. HULSHOF. Versl. Kon. Akad. Amsterdam Maart 1920 und Zeitschr. f. Phys. Chem., 128 Bd. 1/2 Heft 1927.

Ausdruck für den Quellungsdruck $dz = \frac{MRT dx}{v}$ oder $z = \frac{MRT x}{v}$ alle

Grössen sich auf das Wasser beziehen. Zwar ist $MR = M_1 R_1$, wobei M_1 und R_1 sich auf den aufgelösten Stoff beziehen, und man kann für $M_1 x$ auch die Anzahl in Auflösung gebrachter Gramme lesen, während v sowohl das Volumen ist, das von $M(1-x)$ Gramm Wasser als von $M_1 x$ Gramm des aufgelösten Stoffes eingenommen wird, aber man wird doch nie etwas anderes daraus schliessen dürfen als dass $\frac{M_1 R_1 T x}{v} = z$ d.h. dem

Quellungsdruck im Wasser gleich ist. Von einer kinetischen Natur des osmotischen Drucks zeigt sich bei der Herleitung nichts.

Man hat oft auf die grosse Uebereinstimmung der osmotischen Erscheinungen und Quellungserscheinungen hingewiesen. Ich meine, dass schon KATZ die Vermutung ausgesprochen hat, dass der osmotische Druck der Quellungsdruck sein sollte. Die Annahme der Anisotropie des Druckes als Folge der Molekularattraktion erscheint für die Beweisführung notwendig.

Osmotisch wirksame Teilchen sind Quellungscentra im Lösemittel.

Teilchen von Perrin. Denken wir uns ein zylinderförmiges offenes gläsernes Gefäss, wobei der Radius des kreisförmigen Durchschnitts etwas kleiner als der Diameter eines Teilchen von Perrin ist. In diesem vertikal gestellten Gefäss haben wir Wasser und Perrin'sche Teilchen, die alle gleich gross sind. Wir nennen diese Teilchen von oben nach unten a , b , c , d u.s.w. Das Wasser im offenen Gefäss stehe unter einem äusseren Druck p_1 . Diesen Druck finden wir überall im Wasser wieder; vermehrt um den Druck, welcher die Folge vom Wassergewicht ist, ist er der Druck, welcher sich in einer horizontalen Ebene überall und in allen Richtungen gleich stark fühlen lässt und der den Perrin'schen Teilchen im Wasser scheinbar einen Gewichtsverlust beibringt, dem Gewicht des verdrängten Wassers gleich. Ausser diesem Druck haben wir zwischen den Teilchen gegenseitig und zwischen den Teilchen und der Wand den Quellungsdruck. Die Quellungsdruckkraft zwischen a und b steht, wenn die Mittelpunkte der Teilchen in der Achse des zylinderförmigen Gefässes liegen, im Gleichgewicht mit dem Gewicht im Wasser des Teilchens a und drückt das Teilchen b mit derselben Kraft hinunter. Die zwischen b und c erregte Quellungsdruckkraft steht nun mit dem Gewicht im Wasser der Teilchen a und b im Gleichgewicht, während das Teilchen c mit dieser Kraft hinunter gedrückt wird. Die Quellungsdruckkraft zwischen zwei Teilchen ist also dem Gewicht im Wasser dieser Anzahl darüber befindlicher Teilchen gleich. Die Entfernung zweier auf einander folgenden Teilchen, nach unten gerechnet, wird also fortwährend kleiner, aber die Abnahme dieser Entfernung wird immer geringer und wird bald unmerklich werden, da der tangentielle Druck im Wasser an einer festen Wand beim dichten Herannahen der Wand sehr stark zunimmt, sodass auf einiger Tiefe eine äusserst geringe Annäherung von zwei Teilchen schon eine sehr grosse

Zunahme der Quellungsdruckkraft zur Folge hat. Es leuchtet wohl ein, dass es der Quellungsdruck ist, der die Teilchen von einander getrennt erhält. Wäre dieser nicht da, wäre die Molekularattraktion der Teilchen und des Wassers so, dass kein gehöriger Quellungsdruck entstünde — und dies kommt manchmal vor — so würden die Teilchen sich alle so weit möglich in vertikaler Richtung zu bewegen anfangen und sich an einander legen.

Betrachten wir nun die Teilchen von Perrin, wie dieser sie bei seinen Untersuchungen hatte, mit dem Radius r . Wir unterscheiden scharf einerseits den Druck im Wasser, der sich in einem Punkt in allen Richtungen gleich stark fühlbar macht d.h. den Druck von aussen, worunter der Inhalt des Gefässes steht, vermehrt um den vom Wassergewicht verursachten Druck und anderseits den Quellungsdruck im Wasser, welcher normal zu den Teilchen steht, der dem Gewicht im Wasser der Teilchen das Gleichgewicht halten will und der, weil die Resultante dieses Quellungsdrucks auf ein Teilchen im allgemeinen fortwährend ihre Richtung und Grösse ändern muss und nicht gleich Null ist, die sogenannte Brown'sche Bewegung jener Teilchen verursacht und erhält. Die Zunahme des Quellungsdrucks im Wasser dz ist das Gewicht im Wasser der Teilchen, gerechnet über ein Säule von 1 cm^2 Grundfläche und einer Höhe dh .

$dz = \frac{\varrho - \varrho_w}{\varrho} g \frac{M_1 x}{v} dh$, worin ϱ die Dichtigkeit des Stoffes, woraus die Teilchen bestehen, ϱ_w die Dichtigkeit des Wassers, M und M_1 die Molekulargewichte des Wassers und des colloidalen Stoffes, $M_1 x$ die Quantität des colloidal dispergierten Stoffes, den man an Stelle der Mx Gramm Wasser hat nehmen müssen um die colloidale Lösung zu bekommen, v das durch $M(1-x) + M_1 x$ Gramm der Lösung eingenommene Volumen; h wird abwärts positiv gerechnet.

Da nun gilt dass $z = \frac{MRT}{v} x$ können wir auch schreiben $dz = \frac{\varrho - \varrho_w}{\varrho} g \frac{M_1 z}{MRT} dh$ oder $\frac{dz}{z} = \frac{\varrho - \varrho_w}{\varrho} g \frac{M_1}{MRT} dh$, woraus $h = \frac{\varrho MRT}{(\varrho - \varrho_w) g M_1} \log_n \frac{z}{z_0}$, während $M_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho N$. Die Beziehung geht also über in die bekannte Formel PERRIN's $h = \frac{MRT}{(\varrho - \varrho_w) g \frac{4}{3} \pi r^3 N} l \frac{n}{n_0}$ worin N

die Anzahl Moleküle in einem Gram molekül ist. Für $\frac{z}{z_0}$ kann man $\frac{n}{n_0}$ schreiben. Wir haben die Beziehung durch Einführung des Quellungsdrucks herleiten können d.h. eines im Wasser herrschenden Druckes und, indem wir davon Gebrauch machen, dass dieser Quellungsdruck durch

$z = \frac{MRT}{v} x$ gegeben werden kann, worin x sehr klein sein muss. Nichts berechtigt die Brown'sche Bewegung wie eine Molekular-kinetische

Erscheinung zu betrachten, aus nichts geht hervor, dass diese Teilchen infolge der Wärmebewegung einen Druck ausüben und eine kinetische Energie haben sollten, alsob sie bei derselben Temperatur in gasförmigem Zustand, durch einen leeren Raum von einander getrennt, verkehrten. Diese Teilchen haben wahrscheinlich eine bedeutend geringere Geschwindigkeit als man gewöhnlich annimmt; sie sind fortwährend in Bewegung, weil die Resultante der Drückungen, die sie erfahren, nicht Null ist. Auch das Wasser ist in fortwährend veränderenden strömenden Bewegung. Ein derartiger Zustand ist ein reeller, stationärer Zustand. Teilchen, wie die von Perrin, verdanken dem Quellungsdruck ihre Stabilität.

Diffusion. Haben wir in einem Gefäss mit Wasser in einer Horizontalebene zwei in Ruhe verkehrende Teilchen, welche Quellungscentra bilden, einander ganz nahe, links ein Teilchen a und rechts ein Teilchen b . Es sei links, eine kleine Strecke von a entfernt, und rechts, von b , der Druck in der Horizontalebene, worin die Teilchen liegen p_1 , dann ist der Druck in jener Ebene zwischen a und b grösser als p_1 und zwar $p_1 + z$. Man könnte meinen, dass zwischen diesen Teilchen ein Gesamtdruck p_1 wäre, aber dies ist nicht richtig. Nehmen wir einmal an, dass dort der Quellungsdruck herrschte und zugleich ein Druck, der in allen Richtungen denselben Wert hätte, $p_1 - z$, so würde der tangentielle Druck demzufolge in dem Wasser um die Teilchen a und b an der Seite, welche sich einander zuwenden, kleiner sein als an der Seite, welche sie einander abwenden. Dies ist nicht möglich, diese tangentiellen Drucke müssen dieselben sein und zwar die an der Seite, welche die Teilchen einander abwenden. Wir finden also zwischen den Teilchen den Druck p_1 um z vermehrt. Dasselbe fanden wir bei unseren zwei Glasplatten, wo in dem Raum zwischen den zwei Platten beim Verkleinern oder Vergrössern ihrer Entfernung der tangentielle Druck an der Wand z.B. p_{2G} erhalten blieb, da dieser Druck an der einander abgewendeten Seite der Platten dies erforderte. Und auch war es der tangentielle Druck ganz nahe an der Wand im Gefäss B , der, an den Wänden des Porions entlang, den tangentiellen Druck längs der Wand im Gefäss A in seinen alten Wert wieder einsetzen wollte, als dieser durch Vermehrung des Quellungsdruckes wegen dem Zusatz von mehr Teilchen bei konstant bleibendem Aussendruck, in diesem letzten Gefäss vermindert war. Dieser tangentielle Druck macht überall seine Ansprüche und spielt eine sehr wichtige Rolle. Der erregte Quellungsdruck z stösst unsere Teilchen a und b aus einander. Es leuchtet ein, dass wir es hier mit einer diffundierenden Kraft zu tun haben. Die bei der Diffusion wirksame Kraft ist das Gefälle des Quellungsdruckes $\frac{dz}{dl} = -\frac{MRT}{v} \frac{dx}{dl}$, wobei gilt, dass diese Grössen sich alle auf Wasser beziehen. Man kann für MR schreiben M_1R_1 und $\frac{M_1x}{v}$ als die Konzentration der Lösung

betrachten, allein man darf nicht für z den osmotischen Druck einführen und diesem Druck molekular-kinetische Eigenschaften zuschreiben.

Arnhem, Febr. 1930.

Vom Verfasser dieses findet man über diesen Gegenstand Aufsätze in: Diss. Amsterdam, 1900; Versl. Kon. Akad. van Wetensch., Amsterdam, Januari 1900; idem, April 1914 idem, Maart 1920; Annalen d. Phys. **4**, 4, 165, 1901; idem **4**, 67, 278, 1922; Zeitschr. für Phys. Chemie **128**, Bd. 1/2 Heft, 1927. Der sich auf Gase und Dämpfe an einer Wand beziehende Teil wird durch einen anderen ersetzt werden.

Mathematics. — *Differentialinvarianten von zwei kovarianten Vektoren in vier Veränderlichen.* Von G. F. C. GRISS. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Unser Ziel ist unter anderem das Aufstellen einer algebraischen Basis von Differentialinvarianten zweiter Ordnung der zwei genannten Vektoren. Wir halten uns dabei an die von M. EUWE ¹⁾ gebrauchte Bezeichnung.

Die Transformationsformeln für die gegebenen Vektoren a_i und \bar{a}_i sind

$$\bar{a}_i = a_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_i} \quad \text{und} \quad \bar{a}_i = a_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bei Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_k} + a_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x_i \partial x_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \bar{x}_k} = \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Elimination der zweiten Ableitungen führt zu dem folgenden Reduktionssatz: Die Differentialinvarianten erster Ordnung von a_i und \bar{a}_i sind die projektiven Invarianten von a_i , \bar{a}_i und ihren Rotationen f_{ik} und φ_{ik} ; kürzer: Das "Adjunktionssystem" erster Ordnung von a_i und \bar{a}_i wird gebildet von f_{ik} und φ_{ik} , wobei

$$f_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \varphi_{ik} = \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x_i} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ein (kleinstes) volles System von projektiven Invarianten dieser Tensoren ist:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} (f' f)^2 & A_{12} &= \frac{1}{2} (f' \varphi)^2 & A_{22} &= \frac{1}{2} (\varphi' \varphi)^2 \\ B_1 &= (a f') (f' a) & B_2 &= (a \varphi') (\varphi' a) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (4)$$

woraus 4 unabhängige absolute Invarianten gebildet werden können.

Zudem werden im Folgenden die Vektoren

$$b_i = \frac{f_i (f \varphi') (\varphi' a)}{\frac{1}{2} A_{11}} \quad \text{und} \quad \beta_i = \frac{\varphi_i (\varphi f') (f' a)}{\frac{1}{2} A_{22}} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

viel benutzt, wobei $N = (a \alpha b \beta) \neq 0$; die Minoren in N geteilt durch N bilden 4 kontravariante Vektoren ${}^h n^i$.

Weiter setzen wir noch

$${}_{hl} F = {}_h n^\mu {}_l n^\nu f_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad {}_{hl} \Phi = {}_h n^\mu {}_l n^\nu \varphi_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

¹⁾ M. EUWE, *Differentiaal invarianten van twee covariante vectorvelden met vier veranderlijken.* Diss. Amsterdam, (1926).

Für die 4 unabhängigen absoluten Differentialinvarianten erster Ordnung wählen wir (alles in Einklang mit M. EUWE)

$$\left. \begin{aligned} {}_1V = {}_{12}F = {}_{34}F = - {}_{23}\Phi, \quad {}_3V = {}_{23}F \\ {}_2V = {}_{14}F = {}_{12}\Phi = {}_{34}\Phi \text{ und } {}_4V = {}_{14}\Phi \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Zur Bestimmung eines Adjunktionssystems zweiter Ordnung muss man die Transformationsformeln für f_{ik} und φ_{ik} differenzieren. Dabei erhält man 2×20 unabhängige Gleichungen, während die Gleichungen (2) noch 2×10 liefern (2×6 sind schon benutzt zur Bestimmung des Adjunktionssystems erster Ordnung). Die Anzahl zweiter Ableitungen $\frac{\partial^2 x_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, welche

eliminiert werden müssen, ist 40. Da diese zweiten Ableitungen berechenbar sind, hat das gefragte Adjunktionssystem $2 \times 20 + 2 \times 10 - 40 = 20$ unabhängige Komponenten. Man findet dann folgenden Reduktionssatz:

Ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird gebildet von ${}_h v_i = \frac{\partial {}_h V}{\partial x_i}$ und den Rotationen c_{ik} und γ_{ik} von b_i und β_i , wobei 8 invariante Relationen gelten:

$$\left. \begin{aligned} ({}_1 v a a p) + ({}_2 v a b p) + ({}_3 v a b p) + ({}_1 v b b p) - \\ - {}_1 V \{ (f' a) (f' p) - (\varphi' a) (\varphi' p) \} - {}_2 V \{ (f' \beta) (f' p) - (\gamma' a) (\gamma' p) \} - \\ - {}_3 V \{ (\varphi' b) (\varphi' p) - (c' a) (c' p) \} - {}_1 V \{ (c' \beta) (c' p) - (\gamma' b) (\gamma' p) \} = 0 \dots \{ p \} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} ({}_2 v a a p) + ({}_4 v a b p) - ({}_1 v a b p) + ({}_2 v b b p) - \\ - {}_2 V \{ (f' a) (f' p) - (\varphi' a) (\varphi' p) \} - {}_4 V \{ (f' \beta) (f' p) - (\gamma' a) (\gamma' p) \} + \\ + {}_1 V \{ (\varphi' b) (\varphi' p) - (c' a) (c' p) \} - {}_2 V \{ (c' \beta) (c' p) - (\gamma' b) (\gamma' p) \} = 0 \dots \{ p \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(für jeden Vektor p_i).

Die Anzahl unabhängiger Komponenten ist hier tatsächlich $4 \times 4 + 2 \times 6 - 8 = 20$.

Hieraus folgt z.B., dass W. EUWE ¹⁾ mit Unrecht in seiner Dissertation mit dazu gehörigen Thesen behauptet, es seien von mir und M. EUWE nicht alle unabhängigen Relationen zwischen den Komponenten des Reduktionssystems zweiter Ordnung angegeben worden. Er stellt noch 4 andere Relationen auf. Wir zeigen in Kürze, wie z.B. die erste dieser 4 Relationen aus den Formeln (8) und (9) abzuleiten ist.

Wir substituieren für p_i in die erste Gleichung b_i und in die zweite a_i und summieren; dabei ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} - {}_1 V (f' a) (f' b) - {}_2 V (f' \beta) (f' b) - {}_2 V (f' a) (f' b) - {}_4 V (f' \beta) (f' a) + \\ + {}_2 V (c' a) (c' b) - {}_1 V (c' \beta) (c' b) - {}_1 V (c' a) (c' b) - {}_2 V (c' \beta) (c' a) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹⁾ W. EUWE, Differentialinvarianten en partieele differentiaalvergelijkingen uit de tensorrekening. Diss. Amsterdam (1928). S. 44 und 45. These 2. Ich benutze die Gelegenheit, auch auf folgende Unvollständigkeit in dieser Dissertation aufmerksam zu machen. Auf S. 2 heisst es, dass ich die Differentialinvarianten für mindestens n Vektoren aufgesucht habe. Ich habe aber Reduktionssysteme angegeben für jede beliebige Anzahl von Vektoren in R_n . Siehe: G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren. Diss. Amsterdam. (1925).

Umrechnung gibt

$$(f'c)^2 = (f'\varphi)^2 \dots \dots \dots (11)$$

Dieses Resultat stimmt überein mit der Relation

$$\frac{1}{2}(f'c)^2 = -\frac{1}{2}(a\varphi')\left(\varphi'\frac{\partial A_{11}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{A_{11}A_{22}}{A_{12}} \dots \dots (12)$$

welche W. EUWE gibt; das liegt daran, dass W. EUWE statt (5) setzt:

$$\underline{b}_i = \frac{f_i(f\varphi')(\varphi'a)}{A_{22}},$$

was augenscheinlich weniger einfach ist. In diesem Falle wird

$$\underline{c}_{ik} = \frac{\partial \underline{b}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \underline{b}_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{b}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \underline{b}_k}{\partial x_i}\right)\frac{A_{11}}{A_{22}} + \frac{1}{2}\left(b_i\frac{\partial A_{11}}{\partial x_k} - b_k\frac{\partial A_{11}}{\partial x_i}\right).$$

Also

$$(f'c)^2 = \frac{1}{2}(f'c)^2\frac{A_{11}}{A_{22}} + (bf')\left(f'\frac{\partial A_{11}}{\partial x}\right) = \frac{A_{11}A_{22}}{A_{12}} - (a\varphi')\left(\varphi'\frac{\partial A_{11}}{\partial x}\right).$$

Wir leiten jetzt aus dem Reduktionssatz für Differentialinvarianten zweiter Ordnung eine algebraische Basis von Differentialinvarianten ab. Dazu bestimmen wir eine algebraische Basis der Tensoren $a_i, a_i, f_{ik}, \varphi_{ik}, {}_h v_i, c_{ik}$ und γ_{ik} , wobei wir also vorläufig von den Relationen (8) und (9) absehen. Die 4 unabhängigen Vektoren geben 16 Transformationsgleichungen, aus welchen die Transformationskoeffizienten $\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ berechnet

werden können. Substitution in die Transformationsgleichungen für a_i, a_i, f_{ik} und φ_{ik} ergibt natürlich nichts Neues, Substitution in die Transformationsgleichungen für ${}_h v_i, c_{ik}$ und γ_{ik} ergibt 28 Invarianten, welche linear sind in diesen Komponenten. Aus dem vollen System von 169 Invarianten, das M. EUWE aufstellt, kann man zur Bestimmung einer algebraischen Basis von vornherein alle diejenigen Invarianten fortlassen, welche nicht linear sind in ${}_h v_i, c_{ik}$ und γ_{ik} . Es bleiben übrig:

$$\left. \begin{array}{llll} (f'c)^2 & (\varphi'\gamma)^2 & (f'\gamma)^2 & (\varphi'\gamma)^2 \\ (af')(f'{}_h v) & (af')(f'{}_h v) & (a\varphi')(q'{}_h v) & (a\varphi')(q'{}_h v) \\ (ac')(c'a) & (a\gamma')(\gamma'a) & & \\ [af\varphi ca] & [af\varphi ca] & [af\varphi ca] & \\ [af\varphi ya] & [af\varphi ya] & [af\varphi ya] & \end{array} \right\} \dots (13)$$

(Bei Vertauschung der Komplexsymbole in den letzten 6 Invarianten ergeben sich nur abhängige Invarianten).

Wir haben hier 28 Invarianten, in welchen alle anderen algebraisch ausdrückbar sind. Es muss deren gerade 28 geben, also ist (13) eine kleinste algebraische Basis.

Berücksichtigen wir jetzt die 8 Relationen (8) und (9), welche durch Substitution von a, α, b und β für p 8 Invarianten geben, welche identisch Null sind. Wir wissen schon, dass die ersten 4 Invarianten von (13) abhängig von den übrigen werden. Weiter ist einfach zu beweisen, dass aus diesen Relationen auch $(a c')(c' \alpha)$, $(a \gamma')(\gamma' \alpha)$, $[a f \varphi c \alpha]$ und $[a f \varphi \gamma \alpha]$ berechenbar sind, sodass also eine kleinste algebraische Basis von Differentialinvarianten zweiter Ordnung von a_i und α_i gebildet wird von den 20 Invarianten ¹⁾

$$\begin{array}{cccc} (a f') (f'_{h v}) & (\alpha f') (f'_{h v}) & (a \varphi') (\varphi'_{h v}) & (\alpha \varphi') (\varphi'_{h v}) \\ [a f \varphi c \alpha] & [\alpha f \varphi c \alpha] & [a f \varphi \gamma \alpha] & [\alpha f \varphi \gamma \alpha]. \end{array}$$

$$(h = 1, 2, 3, 4).$$

¹⁾ Bei der Bestimmung des vollen Systems, das W. EUWE auf S. 28 seiner Dissertation gibt, sind die invarianten Relationen (8) und (9) nicht berücksichtigt, was leicht aus (11) zu ersehen ist.

Physiology. — *Der Einfluss der Narkose mit Cyankalium auf den Nerven. Beitrag zur Frage der Dekrementleitung im Nerven.* Von C. A. G. WIERSMA. (Vorläufiger Mitteilung). (Aus dem Institut für vergleichende Physiologie der Univ. Utrecht). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Mehrere Untersucher haben mittels der Narkose des Nerven geprüft, ob das „Alles-oder-nichts-Gesetz“ für den normalen und für den narkotisierten Nerven gültig ist, oder nicht, und sind zu verschiedenen Meinungen gekommen.

KEITH LUCAS (1) hatte aus seinen Untersuchungen geschlossen, dass das Gesetz zwar für den normalen Nerven gilt, da eine Wiederherstellung der Erregung im Nerven distal von der narkotisierten Strecke stattfindet, aber dass die narkotisierte Strecke selbst mit Dekrement leitet.

G. KATO (2) hat auch für den narkotisierten Nerven die Gültigkeit des Gesetzes behauptet. Dieser Autor hat mit seinen Schülern mit vielen Methoden, auch in Narkose das Gesetz immer gültig gefunden. Er gibt einige Versuchsfehler an, die zu den entgegengesetzten Resultaten geführt haben sollen.

Manche Untersucher sind mit KATO's Auffassung nicht einverstanden, und halten auch für den normalen Nerv das Gesetz für ungültig.

G. MANSFELD und A. LANČZOS (3) leiteten den Nerven durch eine Lösung von $\frac{1}{2}$ normal Ringer mit 1 % Ca Cl_2 und fanden, dass die Reizschwelle für proximale elektrische und chemische Reize mit zunehmender Narkose zunimmt. Sie schlieszen daraus, dass für den normalen Nerven das Gesetz nicht gilt. Dass dieser Effekt mit gewöhnlichen Narkotika nicht auftritt, wird einer besondere Eigentümlichkeit dieser Narkotika zugeschrieben. Diese sollen nämlich entweder völlig lähmen, oder ganz wirkungslos sein.

Von A. LANČZOS (4) wird noch aus einem anderen Grund die Gültigkeit des Gesetzes für den normalen Nerven gelehnet. Sie durchschneidet den mit Aethylurethan narkotisierten Nerven, ehe die Erregungsleitung verschwunden ist, an verschiedene Stellen und erhält kleinere Muskelzuckungen, wenn sie in der Mitte der narkotisierten Strecke, als wenn sie im proximalen normalen Nervenanteil durchschneidet.

Sie schlieszt, dass eine kleinere Erregung als solche auch im normalen distalen Nervenanteil weiter geleitet wird. Sie nimmt also an, dass alle Nervenfasern wirklich erregt worden sind, und dass (im Widerspruch zu der oben zitierten Meinung!) bei der Narkose mit Aethylurethan eine

abgeschwächte Erregung entstehen kann. Warum ein Reiz, der den normalen proximalen Nerventeil trifft, nicht ebensogut in diesem Augenblick geschwächt weitergeleitet wird, bleibt völlig unerklärt.

Betrachtet man die verschiedenen von KATO angewandten Narkotika, so ergibt sich, dass diese alle zu den von WARBURG (5) als „indifferent“ benannten gehören. Es wäre nicht ausgeschlossen, dass sich mit einem spezifischen Narkotikum andere Resultate ergeben würden. Ich entschloss mich dieses mit Cyankali zu untersuchen. Versuchsobjekt war das Ischiadicus-Gastrocnemius-Präparat von *Rana esculenta*.

*Versuche mit ungleichen Längen der narkotisierten Strecken
bei zwei Nerven.*

Diese Versuche sind von KATO vielfach gemacht worden und ergaben immer *gleichzeitiges* Unwirksamwerden äusserer Reize.

Zwei Ischiadici eines Frosches werden durch eine Narkosekammer von der Form eines länglichen Rechteckes geleitet, sie kreuzen einander ohne sich zu berühren so dass ein Nerv auf eine lange Strecke, der andere auf eine kurze Strecke durch das Narkotikum läuft.

Die grösste Länge beträgt 18 mm. Die Nervenstrecke ist so gross als sie sich noch eben einwandfrei von gleichmässiger Dicke bei grösseren Fröschen präparieren lässt. Die kürzere Narkosestrecke beträgt 9 mm.

Gereizt wurde mittels einzelner Induktionsschläge, nur wenig stärker als „gerade maximal“.

Wie man aus Tabelle 1 ersieht, sind die Resultate mit Aethylurethan denjenigen KATO's ähnlich.

TABELLE 1.

Narkose mittels Aethylurethan-Ringer-Lösung. Narkotisierte Nervenstrecken 9 und 18 mm.
Angabe ist die Zeit, in welcher völlige Narkose eintrat.

Aethylurethan.	9 mm.	18 mm.	Differenz.
2 ‰	25'45"	25'30"	+ 1 ‰
2 „	29'15"	29'15"	0 „
2 „	28'30"	28'	+ 2 „
2 „	19'	19'30"	- 3 „
2 „	20'30"	20'30"	0 „
1.75 ‰	86'	81'	+ 6 „
1.75 „	60'	57'	+ 5 „

Ganz andere Resultate erhält man aber mit Narkose mittels Cyankalium bei übrigens gleicher Versuchsanordnung. Hier versagt der Muskel dessen Nerv auf eine lange Strecke durch das Narkotikum läuft zuerst.

Es tritt eine grosse, aber unregelmässige Abweichung von KATO's Resultaten, zu Gunsten einer Dekrementleitung zu Tag.

TABELLE II.

Narkose mittels Cyankalium-Ringer-Lösung. Narkotisierte Nervenstrecken 9 und 18 mm. Angegeben ist die Zeit, in welcher völlige Narkose für einen proximalen elektrischen Reiz eintrat.

KCN.	9 mm.	18 mm.	Differenz.
0.15 ‰	34'	26'	+ 31 ‰
0.15 „	44'	— 22' „	+ 100 „
0.15 „	+ 67'	+ 44'	+ 52 „
0.15 „	67'	+ 36'	+ 86 „
0.25 „	+ 25'	+ 13'	+ 92 „
0.25 „	+ 43'	+ 46'	— 6 1/2 „
0.3 „	43'	— 33'30''	+ 29 „
0.33 „	+ 43'	+ 32'	+ 34 „
0.5 „	+ 28'	+ 17'	+ 65 „
0.5 „	+ 61'	37'	+ 65 „
0.5 „	+ 21'	+ 16'	+ 31 „
0.5 „	+ 28'	+ 22'	+ 27 „
0.5 „	+ 24'30''	+ 16'	+ 83 „
0.5 „	37'	29'	+ 27 „
0.5 „	45'	40'	+ 12 „
0.5 „	30'30''	29'	+ 5 „
0.5 „	24'	16'	+ 50 „
0.5 „	30'	24'	+ 25 „
0.5 „	+ 18'	+ 13'	+ 38 „

Das Zeichen + bei der Zeitangabe bedeutet, dass ein mechanischer Reiz nach Ablauf der Narkose noch wirksam war proximal von der Mitte des Gefässes, ein — bedeutet „nicht-wirksam“.

Wie man in Tabelle III sieht, ist die Abweichung bei Stücken *gleicher Länge* nicht nachzuweisen.

TABELLE III.

Narkose mittels KCN-Ringer Lösung. Gleiche Narkosestrecken. Zeit wie in Tabelle I.

KCN.	Längen	Nerv 1 Nerv 2		Differenz
		Zeit 20'30''	21'30''	
1/2 ‰ KCN.	9 mm.	„ 24'	24'	0 „
1/2 „ KCN.	12 „	„ 23'	24'	1 „
1/2 „ KCN.	20 „	„ 23'	24'	1 „

Nach Ablauf der Erregbarkeit für „gerade maximale“ Zuckungen waren stärkere Reize auch ohne Erfolg, wie auch mechanische Reizung (Durchschneidung).

Betrachten wir nun die möglichen Versuchsfehler bei den Versuchen mit ungleicher Nervenstrecke. Da Stromschleifen ausgeschlossen sind, wäre zuerst an Diffusion an den Wänden des Narkosegefäßes zu denken. Die narkotisierten Strecken sind aber lang in Vergleich mit den Zahlen, die KATO angibt.

Aber auch aus anderen Gründen lässt sich diese Möglichkeit ausschließen. Durchschneidet man, nachdem ein äusserer proximaler Reiz erfolglos bleibt, den Nerv im Gefäß, so lässt sich im allgemeinen ein Erfolg bereits erzielen, wenn man in seinem proximalen Teil durchschneidet. Das ist also bei einer Narkosestrecke von 18 mm. ungefähr 12 mm. von der distalen Wand entfernt. Durchschneidungen näher bei der distalen Wand haben dann einen grösseren Erfolg.

In Tabelle II sind alle Fälle, wo das Durchschneiden in der proximalen Hälfte Muskelzuckung zur Folge hatte mit + bezeichnet, mit — diejenigen, wo das nicht der Fall war. Die übrigen Nerven wurden nicht geprüft.

Man könnte diese Tatsache auch so erklären, dass das KCN ungleichmässig eindringt. Betrachten wir diese Möglichkeit näher, so könnte man zwei Fälle annehmen.

1. Es tritt eine völlige Narkose an einem verletzten Punkt auf. Dieser Punkt müsste dann fast immer bei der proximalen Wand liegen, was nicht anzunehmen ist, da speziell im Falle von 9 mm. Länge der Narkosestrecke gar kein Grund dazu vorliegt.

2. Es wäre möglich, dass das Cyankalium nicht an einer, sondern an mehreren Stellen eindringt, und hier eintige, dort andere Fasern lähmt. Diese Betrachtung würde in Uebereinstimmung mit den Versuchen mit Durchschneidung sein; aber nicht nur liessen sich die Versuche mit gleicher narkotisierten Länge so nicht erklären, sondern man müsste auch noch die Annahme mache, dass alle Fasern ungefähr zu gleicher Zeit narkotisiert werden.

Bei KCN Narkose zeigt sich nämlich noch ausgesprochener als bei Narkose mit Aethylurethan die Erscheinung, dass die Muskelzuckungen innerhalb einiger Minuten von maximal bis null absinken.

Man muss also meines Erachtens annehmen, dass der Nerv bei Narkose mittels KCN mit Dekrement leitet.

Der normale Nerv folgt dann aber bestimmt dem „Alles-oder-nichts-Gesetz,“ da äussere stärkere Reize ohne Erfolg bleiben, wenn schwächere unwirksam geworden sind. Kommt aber im distalen Teil eine durch Dekrement abgeschwächte Erregung an, dann stellt sie sich wieder völlig her.

Es wurden auch andere Versuche gemacht, um das Betragen des Nerven unter diesen Umständen zu prüfen.

KATO (l. c.) gibt auf Seite 44 seines Buches eine Beschreibung und

Abbildung von einem von T. HAYASHI angewandten Instrument, zu einer mechanischen Reizung von Nerven. Ein Hammer aus Aluminium fällt auf den Nerven und durch Abstufung der Fallhöhe (in Graden) kann man den Schwellenreiz an einem beliebigen Punkt bestimmen.

Eine ähnliche Methode habe ich benutzt, nur war der Hammer etwas leichter. Der Schwellenreiz für den normalen Nerv war 8° anstatt 4° . Zuerst wurden Versuche mit Aethylurethan ausgeführt.

Diese ergaben die Resultate von Tabel IV, also eine gute Uebereinstimmung mit denjenigen KATO's, nämlich eine gleichmässige Zunahme

TABELLE IV.

Mechanische Reizung durch fallenden Hammer. Narkose: Aethyluretan.

A. 2% Aethylurethan. Länge 12 mm. Schwellenreiz vor Anfang 8° .

Nach 5 Min. mm. Dist. $1\frac{1}{2}$ — 4 — 6 — 9 Prox.
Reiz 12° 16° 16° 16°

Nach 13 Min. (äussere Reize unwirksam)

mm. Dist. $1\frac{1}{2}$ — 2 — 3 — 4 — 5 Prox.
Reiz 20° 30° 70° 80° ∞ .

B. $1\frac{1}{2}$ % Aethylurethan. Länge 12 mm. Schwellenreiz vor Anfang 8° .

Nach 11 Min. mm. Dist. $1\frac{1}{2}$ — 2 — 3 — 5 — 7 — 9 — 11 Prox.
Reiz 5° 6° 10° 20° 20° 20° 20°

Nach 13 Min. (äussere Reize unwirksam)

mm. Dist. $1\frac{1}{2}$ — 2 — 3 — 4 — 5 Prox.
Reiz 10° 10° 10° 22° ∞ .

C. $1\frac{1}{2}$ % Aethylurethan. Länge 9 mm. Schwellenreiz vor Anfang 10° .

Nach 15 Min. mm. Dist. 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 Prox.
Reiz 10° 18° 25° 25° 25° 25° 22° 18° .

des Schwellenreizes in gleichen Werten für den grössten Teil des Nerven; nur bei den Wänden erhält man niedrigere Werte (bei der proximalen Wand nur in Versuch C) *Ganz anders beträgt sich wieder der Nerv in KCN.* (Tabelle V).

TABELLE V.

Wie Tabelle IV, Narkose mittels KCN-Ringer-Lösung.

A. $\frac{1}{3}$ % KCN. Narkotisierte Strecke 14 mm. Schwellenreiz vor Anfang 8° .

Nach 10 min. mm. Prox. 12 — 10 — 8 — 6 — 4 — 2 Dist.
Reiz 4° 4° 4° 4° 4° 4° .

Nach 23 min. (äussere prox. Reize unwirksam)

mm. Prox. 7 — 6 — 5 — 4 — 2 Dist.
Reiz ∞ 90° 40° 30° 20° .

B. $\frac{1}{3}\%$ KCN. Länge 10 mm. Kein mechanischer Reiz, bis 27 Min. (äussere Reize eben unwirksam).

mm. Prox. 9 — 8 — 7 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1 Dist.
Reiz ∞° ∞° ∞° 90° 40° 30° 20° 16° 10° .

C. $\frac{1}{4}\%$ KCN. Länge 10 mm. Kein mech. Reiz bis 40 Min. (äussere Reize eben unwirksam).

mm. Prox. 9 — 8 — 7 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1 Dist.
Reiz ∞° ∞° ∞° 20° 18° 16° 10° 10° 10° .

D. $\frac{1}{3}\%$ KCN. Länge 12 mm. Kein mech. Reiz, bis 25 Min. (äussere Reize eben unwirksam).

mm. Prox. 11 — 8 — 7 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 Dist.
Reiz ∞° ∞° 90° 45° 20° 10° 4° 3° .

Zuerst tritt hier eine Erregungssteigerung auf (Versuch A). Da der Nerv sich aber gegen mechanische Reizung sehr empfindlich zeigte, wurde meistens damit gewartet, bis der äussere proximale Reiz erfolglos blieb. Dann laszen sich auch so noch Zuckungen erhalten bei Reizung von Stellen im proximalen Teil, was bei Aethylurethan nicht gelingt.

Da diese Methode sehr ungenau ist, wurden andere Versuche mit elektrischer Reizung in dem narkotisierten Teil gemacht. Benutzt wurde ein Gefäss von 20 mm. Länge aus Ebonit. Auf 13 und 7 mm. Abstand von der distalen Wand befanden sich Querwände je mit einem engen Loch. Der Nerv kann in diesen Löchern eben untergetaucht liegen. In der Flüssigkeit waren Silberdrähte, und man erhielt also zwei von einander isolierte Flüssigkeitselektroden. Bestimmt wurde der Schwellenreiz für diese zwei inneren und der gerade maximale Reiz für eine proximale äussere Elektrode.

Die Resultate mit Aethylurethan sind in Tabelle VI gegeben. Wie ersichtlich werden beide Reizschwellen allmählich *gleichmässig höher*.

TABELLE VI.

Narkosekammer 20 mm. Reizelektroden 7 und 13 mm. von der distalen Wand. Aeuszere Elektrode RA von gerade maximaler Zuckung. Innere Elektroden RA von Schwellenreiz.

Einzelne Induktionsschläge. Narkose mittels 2% Aethylurethan-Ringer-Lösung.

A.

Narkosezeit	Aeuszere Elektrode	Prox. Elektrode	Dist. Elektrode
2'	50 cm.	48	48
5'		43	42
10'		40	40
15'		39	39
25'		$38\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$
30'	Kleinere Zuckung d. Muskeln	34	$37\frac{1}{2}$
33'		33	37
40'	Keine Zuckung	30	37
42'		14	37

B.

Narkosezeit	Aeuszere Elektrode	Prox. Elektrode	Dist. Elektrode
1'	50 cm.	50	50
5'		44	43
10'		42	41
20'		40	38
30'		39	36
33'	Kleinere Zuckung	35	36
38'	Keine Zuckung	20	36

bis zu einer bestimmten Zeit. Dann bleibt diejenige des distalen Reizes ungefähr gleich, während die proximale noch immer abnimmt. Es haben also die Stromschleifen von der distalen Elektrode die Wand erreicht. *Die selben Versuche mit KCN zeigen etwas anderes.*

TABELLE VII.

Wie Tabelle VI. Narkose mittels KCN-Ringer-Lösung.

A. $\frac{1}{2}\%$ KCN

Narkosezeit	Aeuszere Elektrode	Prox. Elektrode	Dist. Elektrode
3'	62	63	56
6'		70	59
10'		56	57
11'		48	56
12'	Kleinere Muskelzuckung	40	50
13'	Keine Zuckung	37	49
20'		26	45
25'		23	43

B. $\frac{1}{3}\%$ KCN

2'	61	48	48
5'		53	50
10'		54	52
15'		45	52
20'		42	50
23'	Kleinere Muskelzuckung	40	48
25'	Keine Zuckung	35	47

C. $\frac{1}{3}\%$ KCN

Narkosezeit	Äusere Elektrode	Prox. Elektrode	Dist. Elektrode
1'	52	46	47
5'		51	51
10'		54	55
15'		49	55
20'		43	51
22'	Kleinere Muskelzuckung	41	50
24'	Keine Muskelzuckung	37	47
26'		33	43

D. $\frac{1}{4}\%$ KCN

2'	51	49	47
5'		55	52
10'		58	56
15'		53	55
20'		46	50
25'	Kleinere Muskelzuckung	40	47
27'	Keine Muskelzuckung	40	47
30'		28	40
35'		19	35

Zuerst tritt die bereits besprochene *Erregbarkeitssteigerung* schön zu Tag, welche dann einer Abnahme Platz macht. Im Gegensatz zu Versuchen mit Aethylurethan verhalten sich beide Schwellenreize aber *nicht gleich, sondern der proximale nimmt viel stärker zu als der distale*. Diese Abnahme der Reizbarkeit tritt schon auf, ehe die Muskelzuckungen nach Reizung durch die äusseren Elektroden kleiner werden. Man muss also wieder auf eine Leitung mit Dekrement schliessen.

Inkrement gibt es wahrscheinlich nicht, da die beiden Stellen *zu gleicher Zeit* ihre grösste Erregbarkeit erreichen.

Wird die Auffassung, dass spezifische Narkotika wirklich eine Leitung mit Dekrement verursachen, und dass die Resultate nicht durch Wirkungen der Ionen getrübt sind, bestätigt (Versuche mit KCl weisen in diese Richtung) so würde dieser Befund auch für die Kenntnis des Stoffwechsels des Nerven Wert haben können.

LITERATUR.

1. K. LUCAS. The conduction of the nervous impulse. London 1917.
 2. G. KATO. The further studies on decrementless conduction. Tokyo 1926.
 3. G. MANSFELD u. A. LANČZOS. Pflüger's Archiv Bnd. 220. 1928.
 4. A. LANČZOS. Pflügers Archiv. Bnd. 223. 1930.
 5. O. WARBURG. Ueber die katalytische Wirkungen der lebenden Substanz. Berlin 1927.
-

Mathematics. — *Die Darstellung der Lorentzgruppe in der komplexen E_2 abgeleitet aus den Diracschen Zahlen.* Von J. A. SCHOUTEN.
(Communicated by Prof. H. A. KRAMERS).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Bei der Behandlung der Darstellung der Lorentzgruppe in der E_4 ¹⁾ und in der komplexen E_2 und den dabei sich ergebenden Spingrößen fällt es auf, dass stets zu Anfang schon gewisse Matrizen, die Paulischen und Zusammenstellungen von diesen verwendet werden. Dies bedeutet eigentlich, dass man von vornherein ein bestimmtes Bezugssystem in der E_4 festgelegt denkt, die Matrizen sind dann eben die Schemata der Bestimmungszahlen gewisser gemischter Größen, die linear homogenen Transformationen in der E_4 oder auch in der E_2 zugeordnet sind ²⁾.

Es soll nun im folgenden eine Behandlung gegeben werden die, ausgehend von den Diracschen hyperkomplexen Zahlen, ganz ohne Festlegung eines Bezugssystems verläuft und bei der also die Paulischen Matrizen gar nicht auftreten. Erst am Schluss wird, nur um den Anschluss zu gewinnen, das Bezugssystem so gewählt, dass diese Matrizen erscheinen.

§ 1. *Hermiteische Größen.*

In einer X^n ¹⁾ kann man neben den Urvariablen ξ^ν , $\nu = 1, \dots, n$, die konjugiert komplexen Werte $\xi^N = \bar{\xi}^{\bar{N}}$, $N = \bar{1}, \dots, \bar{n}$, betrachten. Unter Vektoren zweiter Art versteht man dann Systeme von n Bestimmungszahlen ν^N , die sich in bezug auf ξ^N genau so transformieren wie die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen Vektors in bezug auf ξ^ν . Aus den Vektoren zweiter Art bauen sich Größen höheren Grades auf wie bei gewöhnlichen Vektoren, aus den beiden Arten von Vektoren aber eine neue Größenart, die *Hermiteischen Größen* ³⁾, die sowohl Indizes des kleinen als des grossen Alphabets tragen. Jeder Grösse zweiter Art ist eine gewöhnliche Grösse eineindeutig zugeordnet,

¹⁾ Unter X_n verstehen wir eine allgemeine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, unter E_n eine X_n mit einer euklidisch affinen Geometrie.

²⁾ Es wäre zu empfehlen das Wort Matrix weniger zu missbrauchen und in jedem Falle genau anzugeben um welche Größen es sich handelt. Hat doch abgesehen von dem Fall des orthogonalen Bezugssystems, der in E_4 nicht vorliegt, z.B. Symmetrie einer Matrix nur bei rein kovarianten oder rein kontravarianten Größen einen Sinn, während Multiplikation in dem Falle gerade sinnlos wird und erst Bedeutung erlangt bei gemischten Größen unter sich oder mit kovarianten oder kontravarianten Größen.

³⁾ J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Ueber die Differentialgeometrie einer Hermiteischen Differentialform und ihre Beziehungen zu den Feldgleichungen der Physik, Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, **32**, (1929) 60—64.

die Hermiteschen Grössen lassen sich aber nicht in dieser Weise auf gewöhnliche Grössen zurückführen. Wichtig für das folgende ist der Begriff der Hermiteschen symmetrischen Grösse $v_{\lambda M}$ zweiten Grades. Ist $v_{\lambda \mu}$ die konjugierte Hermitesche Grösse so lautet die (invariante) Symmetriebedingung

$$v_{\lambda M} = \bar{v}_{M\lambda} (1)$$

Bei gemischten Grössen hat die Hermitesche Symmetrie keinen Sinn. Jeder Hermiteschen symmetrischen Grösse, ist eine Hermitesche Form zugeordnet.

§ 2. Ableitung der Darstellung aus den Diracschen Zahlen.

Die einfachste Form der Wellengleichung

$$\left. \begin{aligned} g^{ij} \partial_i \partial_j \psi &= \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi ; g^{ij} = \delta^{ij} ; \partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} ; \\ i, j, k &= 0, 1, 2, 3 \\ \xi^1 &= x, \xi^2 = y, \xi^3 = z, \xi^0 = ct. \end{aligned} \right\} (2)$$

lässt sich bekanntlich nach Einführung der Diracschen hyperkomplexen Zahlen α^k , die durch die Gleichungen

$$\alpha^{(i} \alpha^{j)} = g^{ij} ; i, j, k = 0, 1, 2, 3 (3)$$

definiert sind, folgendermassen schreiben:

$$\left(\alpha^j \frac{h}{i} \partial_j + \frac{mc}{i} \alpha^4 \right)^2 \psi = 0 (4)$$

wo

$$\alpha^4 = \alpha^0 \alpha^1 \alpha^2 \alpha^3 (5)$$

Die 16 Zahlen $1, \alpha^k, \alpha^{ij} = \alpha^i \alpha^j, \alpha^{ijk} = \alpha^i \alpha^j \alpha^k, \alpha^4$ bilden ein geschlossenes associatives Zahlensystem²⁾. Sie können sich auffassen lassen als gemischte Grössen zweiten Grades mit Determinante 1 in einer Hilfs- E_4 , die Multiplikation entspricht dann der einmaligen Ueberschiebung:

$$\alpha^i \cdot_B \alpha^j \cdot_A = \alpha^{ij} \cdot_C \cdot_A (6)$$

Jeder Zahl entspricht also in eineindeutiger Weise eine unimodulare lineare homogene Transformation in E_4 . Insbesondere entspricht jeder Zahl $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ sowie jeder Zahl einer solchen Gruppe von fünf Zahlen mit denselben Rechenregeln eine Transformation mit den Elementarteilern $(\lambda - 1), (\lambda - 1), (\lambda + 1), (\lambda + 1)$ für $k = 1, 2, 3$ und $(\lambda - i), (\lambda - i), (\lambda + i), (\lambda + i)$ für $k = 0, 4$. Alle Grössen, die in der Hilfs- E_4 auftreten können, heissen *Spinoren*, die Vektoren auch *Spinvektoren*.

¹⁾ Diese Form führt auf EDDINGTON zurück; A symmetrical treatment of the wave equation. Proc. Royal Soc. London, **121**, (1928) 524—542.

²⁾ Vergl. über die Eigenschaften dieses Systems J. A. SCHOUTEN, Ueber die in der Wellengleichung verwendeten hyperkomplexen Zahlen. Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amst. (1922).

Beim Uebergang zu einem andern orthogonalen Bezugssystem erleiden $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ eine Lorentztransformation und bleibt α^4 invariant. Wählen wir also die Massvektoren in E_4 einmal so dass

$$\alpha_{\cdot A}^{4C} = -i e_{\cdot 1}^C e_A - i e_{\cdot 2}^C e_A + i e_{\cdot 3}^C e_A + i e_{\cdot 4}^C e_A. \quad (7)$$

was infolge der Werte der Elementarteiler von α^4 stets möglich ist, so ist unmittelbar ersichtlich, dass es in der E_4 zwei bei allen linearen homogenen Transformationen von $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ invariante Ebenen gibt, die Ebene E_2 von $e_{\cdot 1}$ und $e_{\cdot 2}$ und die Ebene \bar{E}_2 von $e_{\cdot 3}$ und $e_{\cdot 4}$.

Aus (7) folgt, dass die Grössen

$$i_{\cdot 0} = 1/2 (1 + i \alpha^4); \quad \bar{i}_{\cdot 0} = 1/2 (1 - i \alpha^4). \quad (8)$$

die Einheitsaffinoren in E_2 bzw. \bar{E}_2 sind. Mit Hilfe dieser Grössen lässt sich jeder Spinvektor in eindeutiger Weise zerlegen in zwei Komponenten in E_2 und \bar{E}_2 .

$$v^C = i_{\cdot 0}^C v^A + \bar{i}_{\cdot 0}^C v^A. \quad (9)$$

Von jetzt an legen wir das Bezugssystem stets so, dass zwei kontravariante Massvektoren in E_2 fallen und zwei in \bar{E}_2 . Für die Bestimmungszahlen in bezug auf die beiden ersten seien dann kleine gotische Buchstaben $a, b, c = 1, 2$ als Indices verwendet, für die anderen die grossen Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} = 1, 2$ desselben Alphabets¹⁾.

Aus (5) und (8) folgt

$$i_{\cdot 0}^a i_{\cdot 0}^k = \bar{i}_{\cdot 0}^a \bar{i}_{\cdot 0}^k = 0^2. \quad (10)$$

und α^k zerfällt also in zwei Grössen

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^k = i_{\cdot 0}^a \alpha^k \bar{i}_{\cdot 0}^b \\ \bar{\beta}^k = i_{\cdot 0}^a \alpha^k i_{\cdot 0}^b \end{array} \right\} \alpha^k = \beta^k + \bar{\beta}^k. \quad (11)$$

für welche infolge (3) gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{\cdot \cdot}^{(i, c) \mathfrak{B}} \bar{\beta}_{\cdot \cdot}^{j) \mathfrak{B}} = i_{\cdot 0}^c g_{ij} \\ \bar{\beta}_{\cdot \cdot}^{(i) \mathfrak{C}} \beta_{\cdot \cdot}^{j) \mathfrak{C}} = \bar{i}_{\cdot 0}^{\mathfrak{C}} g_{ij} \end{array} \right\} \quad (12)$$

β^k liegt mit dem oberen Index in E_2 und mit dem unteren in \bar{E}_2 und bildet also die kontravarianten Vektoren der \bar{E}_2 eineindeutig ab auf die der E_2 . Bei $\bar{\beta}^k$ verhält es sich gerade umgekehrt. Laut (12) sind die beiden Abbildungen einanders Umkehrungen für $k = 1, 2, 3$, während dasselbe

¹⁾ Die Verwendung von grossen und kleinen Buchstaben bedeutet hier noch nicht dass Hermitesche Grössen auftreten.

²⁾ $i_{\cdot 0}^a \alpha^k i_{\cdot 0}^b$ steht abkürzend für $i_{\cdot 0}^C \alpha^k \cdot D_{\cdot 0}^D \cdot A$.

nur bis auf das Vorzeichen gilt für $k=0$. Die Abbildung ist natürlich nicht dieselbe für verschiedene Wahl von k und ändert sich auch bei Lorentztransformationen von $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$.

Jedem Vektor w_i ist zweimal in eineindeutiger Weise ein gemischter Spinor zugeordnet

$$\left. \begin{aligned} w_{\cdot \mathfrak{A}}^c &= w_j \beta_{\cdot \cdot}^{j c} \\ w_{\cdot \alpha}^{\mathfrak{G}} &= w_j \bar{\beta}_{\cdot \cdot}^{j \mathfrak{G}} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (13)$$

und diese beiden Spinoren bestimmen sich auch gegenseitig eindeutig. Jedem Bivektor v_{ij} ist in eindeutiger Weise der gemischte Spinor der E_2

$$v_{\cdot \alpha}^c = v_{ij} \beta_{\cdot \cdot}^{i c} \bar{\beta}_{\cdot \cdot}^{j \mathfrak{G}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (14)$$

zugeordnet und ebenso der gemischte Spinor der \bar{E}_2

$$v_{\cdot \mathfrak{A}}^{\mathfrak{G}} = v_{ij} \bar{\beta}_{\cdot \cdot}^{i \mathfrak{G}} \beta_{\cdot \cdot}^{j c} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (15)$$

Nun folgt aus (3, 5, 8, 11)

$$\left. \begin{aligned} \iota_1 &= i \beta^0 \bar{\beta}^1 = -\beta^2 \bar{\beta}^3 = i \iota_0^{01} = -\iota_0^{23} \\ \bar{\iota}_1 &= -i \bar{\beta}^0 \beta^1 = -\bar{\beta}^2 \beta^3 = -i \bar{\iota}_0^{01} = -\bar{\iota}_0^{23} \end{aligned} \right\} \text{cycl. } 1, 2, 3 \cdot \cdot \cdot \quad (16)$$

welche Gleichungen gleichzeitig zur Definition der zur Abkürzung eingeführten Zeichen $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \bar{\iota}_1, \bar{\iota}_2, \bar{\iota}_3$ dienen. Die ι bzw. $\bar{\iota}$ sind gemischte Spinoren der E_2 bzw. \bar{E}_2 und aus (16) folgt

$$\iota_1 = 1/2 (-\alpha^{23} + i \alpha^{01}); \quad \bar{\iota}_1 = 1/2 (-\alpha^{23} - i \alpha^{01}) \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

Es besteht demzufolge einerseits eine *eindeutige* Zuordnung zwischen den *reellen* Bivektoren und den linear mit komplexen Koeffizienten in $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ ausdrückbaren linearen Transformationen der E_2 und andererseits dasselbe in \bar{E}_2 . Aus (16) folgt leicht, dass ι_0, \dots, ι_3 und ebenso $\bar{\iota}_0, \dots, \bar{\iota}_3$ ein Quaternionensystem bilden:

$$\left. \begin{aligned} \iota_1 \iota_2 &= -\iota_2 \iota_1 = \iota_3; & \bar{\iota}_1 \bar{\iota}_2 &= -\bar{\iota}_2 \bar{\iota}_1 = \bar{\iota}_3 \\ \iota_1 \bar{\iota}_1 &= -\bar{\iota}_1 \iota_1 = 0; & \bar{\iota}_1 \iota_1 &= -\iota_1 \bar{\iota}_1 = 0 \end{aligned} \right\} \text{cycl. } \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (18)$$

was besagt, dass $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \bar{\iota}_1, \bar{\iota}_2, \bar{\iota}_3$ die Elementarteiler $(\lambda + i), (\lambda - i)$ haben, und daraus geht hervor, dass die *reellen* Bivektoren gerade den komplexen linearen Transformationen mit Spur 0 sowohl in E_2 als in \bar{E}_2 zugeordnet sind. Da sich überdies ι_0 und $\bar{\iota}_0$ gegenseitig invariant zuordnen lassen, besteht eine *eindeutige* Zuordnung zwischen den kom-

plexen linearen Transformationen in E_2 und \bar{E}_2 und diese hat die besondere Eigenschaft, dass $\lambda p + \mu q$ und $\bar{\lambda} \bar{p} + \bar{\mu} \bar{q}$ zugeordnet sind, sobald p, q und \bar{p}, \bar{q} zugeordnet sind und λ, μ die zu $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ konjugierten komplexen Zahlen sind. Einer unimodularen Transformation in E_2 entspricht ein Quaternion $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 i + \varphi_2 j + \varphi_3 k$ mit Norm (Quadratsumme der Koeffizienten) 1, seiner Umkehrung der "konjugierten" (nicht im Sinne von komplex konjugierten) Quaternion $\varphi^{-1} = \varphi_0 - \varphi_1 i - \varphi_2 j - \varphi_3 k$. Bei der allgemeinsten Transformation in E_2 und \bar{E}_2 erleidet also α^k die Transformation

$$' \alpha^k = (\varphi + \psi) \alpha^k (\varphi^{-1} + \psi^{-1}) = \varphi \beta^k \psi^{-1} + \psi \bar{\beta}^k \varphi^{-1}; k = 0, 1, 2, 3 \quad (19)$$

wo φ und ψ beliebige (nicht notwendig unimodulare) Transformationen in E_2 bzw. \bar{E}_2 darstellen. Man überzeugt sich leicht, dass folgende Sätze gelten:

1. Eine Transformation der Form (19) wo φ und ψ beide unimodular sind, ist eine Lorentztransformation, d. h. sie lässt die Form $\alpha^i \alpha^j g_{ij}$ invariant.

2. Eine Transformation der Form (19) ist dann und nur dann eine reelle Lorentztransformation wenn die Norm von φ und die von ψ reell sind und $\varphi, \psi, \psi, \varphi$ zu $\varphi, \varphi, \varphi, \varphi$ komplex konjugiert sind.

3. Nur die Lorentztransformationen, bei denen weder der Koeffizient von α^0 in $'\alpha^0$ noch eine ungerade Anzahl der Koeffizienten von α^1 in $'\alpha^1$, α^2 in $'\alpha^2$, α^3 in $'\alpha^3$ negativ sind, lassen sich in der Form (19) darstellen. Es können also nur die Lorentztransformationen der Gruppe, die erzeugt wird durch die reellen Drehungen des Raumes und eine sogenannte „spezielle“ Lorentztransformation

$$\left. \begin{aligned} 'x &= x \cos h \lambda t + t \sin h \lambda t \\ 't &= x \sin h \lambda t + t \cos h \lambda t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20)$$

in der Form (19) geschrieben werden, während weder die Gruppe, die entsteht durch Hinzufügung der Transformation $'t = -t$, noch die, welche durch Hinzufügung von $'x = -x$ erzeugt wird, in diese Form eingeht.

Die Bezugssysteme in E_2 und \bar{E}_2 sind bis jetzt völlig frei gelassen. Wir schränken jetzt die Wahl ein durch die Forderung, dass die α und $\bar{\alpha}$ und demzufolge auch die β und $\bar{\beta}$ konjugiertkomplexe Bestimmungszahlen haben. Dadurch werden die Bezugssysteme bis auf lineare homogene in E_2 und \bar{E}_2 komplexkonjugierte Transformationen festgelegt. Aus (16) folgt für die Determinanten von β und $\bar{\beta}$, die bei diesen Transformationen keine Invarianten sind, dass

$$|\beta^0| = -|\beta^k|; |\bar{\beta}^0| = -|\bar{\beta}^k|; k = 1, 2, 3. \quad \dots \quad (21)$$

Wir können also zweitens fordern dass

$$|\beta^0| = -|\beta^k| = |\bar{\beta}^0| = -|\bar{\beta}^k| = +1; k = 1, 2, 3. \quad (22)$$

eine Forderung, die invariant wird, wenn wir uns von jetzt an nur noch auf Transformationen mit reeller Determinante beschränken. Dabei können wir die Beschränkung noch weiter durchführen bis auf unimodulare Transformationen, da ein *reeller* Wert der Determinante offenbar auf die Transformation der ι , $\bar{\iota}$, β und $\bar{\beta}$ keinen Einfluss hat.

Es steht jetzt nichts mehr im Wege die Grössen der \bar{E}_2 zu identifizieren mit den Grössen zweiter Art (vgl. § 1) der E_2 , die $\bar{\iota}$ werden dann identisch mit den zu den ι kongugierten Grössen zweiter Art, und die β und $\bar{\beta}$ werden konjugierte Hermitesche Grössen ¹⁾.

Da die erlaubten Transformationen in E_2 jetzt unimodular sind, existieren zwei invariante Bivektoren

$$f_{ab} = 2 e_{[a}^1 e_{b]}^2; F^{ab} = 2 e_{1[a} e_{b]}^2. \quad (23)$$

und ihre Konjugierten \bar{f}_{ab} und \bar{F}^{ab} . Es gilt nun der merkwürdige Satz:

Wird aus β_{ab}^{kc} oder $\bar{\beta}_{ab}^{kc}$ durch Ueberschiebung mit einer geeigneten unter den Grössen f, F, \bar{f} oder \bar{F} eine Grösse mit nur kovarianten oder nur kontravarianten Indizes erzeugt, so ist diese Grösse stets Hermitesch symmetrisch.

Es müssen also die Identitäten

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ba}^k &= \beta_{ab}^{kc} f_{cb} = \epsilon_{ab}^k = \bar{\beta}_{ab}^{kc} f_{cb} \\ \gamma_{ab}^{kc} &= \beta_{ab}^{kc} F^{ca} = \bar{\gamma}_{ab}^{kc} = \bar{\beta}_{ab}^{kc} \bar{F}^{ca} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3 \quad (24)$$

bewiesen werden, sofern sie nicht dienen zur Definition der Grössen γ , $\bar{\gamma}$, ϵ und $\bar{\epsilon}$ ²⁾, deren Vorzeichen so gewählt ist, dass:

$$\beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma}; \quad \bar{\beta}\beta = \bar{\gamma}\gamma; \quad \alpha\alpha = (\gamma + \bar{\epsilon})(\gamma + \bar{\epsilon}) \quad (25)$$

In der Tat folgt nun aus (12), *unabhängig von der näheren Wahl der Bezugssysteme in E_2 und \bar{E}_2*

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\cdot\cdot 1}^{k1} &= -\bar{\beta}_{\cdot\cdot 2}^{k2} \\ \beta_{\cdot\cdot 2}^{k2} &= -\bar{\beta}_{\cdot\cdot 1}^{k1} \\ \beta_{\cdot\cdot 2}^{k1} &= -\bar{\beta}_{\cdot\cdot 2}^{k1} \\ \beta_{\cdot\cdot 1}^{k2} &= -\bar{\beta}_{\cdot\cdot 1}^{k2} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3 \quad (26)$$

¹⁾ Es ist klar, dass das Auftreten der konjugiertkomplexen Transformationen im zweiten Satz auf S. 193, sowie der Hermiteschen Grössen hier, seinen Grund findet in dem Umstande, dass der zugrunde gelegte Fundamentaltensor den Index 3 hat, also darin, dass die Lorentzgruppe zugrunde gelegt ist und nicht die Gruppe der vierdimensionalen Drehungen.

²⁾ Ich ziehe es vor bei dem Herauf und Herunterziehen der Indizes mittels f und F den Kernbuchstaben zu ändern. Man kommt sonst zur merkwürdigen Konsequenz: $v_b^b w_b^b = -v_b^b w_b^b$.

und die ersten beiden dieser Gleichungen liefern

$$\gamma^{k1\bar{2}} = \bar{\gamma}^{k\bar{2}1} \quad ; \quad \varepsilon_{k,1\bar{2}} = \bar{\varepsilon}_{k,2\bar{1}} \quad ; \quad k=1, 2, 3 \quad . \quad . \quad (27)$$

w.z.b.w. Ausserdem folgt aber noch

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{k1\bar{2}} &= -\bar{\varepsilon}_{k,1\bar{2}} \\ \gamma^{k2\bar{1}} &= -\bar{\varepsilon}_{k,2\bar{1}} \\ \gamma^{k1\bar{1}} &= -\bar{\varepsilon}_{k,2\bar{2}} \\ \gamma^{k2\bar{2}} &= -\bar{\varepsilon}_{k,1\bar{1}} \end{aligned} \right\} k=1, 2, 3 \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Durch die Ueberschiebung mit f oder F in (24) kann sich die Determinante nicht ändern und es ist also

$$|\gamma^0| = |\gamma^0| = 1 \quad ; \quad |\gamma^k| = |\bar{\gamma}^k| = -1 \quad ; \quad k=1, 2, 3 \quad . \quad (29)$$

Daraus geht aber hervor, dass von den Hermiteschen Tensoren nur γ^0 , $\bar{\gamma}^0$, E^0 und \bar{E}^0 positiv definit und die anderen alle nicht definit sind.

Diese Tatsache kann dazu verwendet werden die Bezugssysteme in \bar{E}_2 und E_2 (allerdings nicht mehr relativistisch invariant) so zu wählen, dass γ_0 und ε_0 die kanonische Form annehmen:

$$\gamma^0_{ab} = e^a_1 e^b_1 + e^a_2 e^b_2 \quad ; \quad \bar{\varepsilon}^0_{ab} = e_a^1 e_b^1 + e_a^2 e_b^2 \quad . \quad . \quad (30)$$

Die Bezugssysteme sind dann bis auf unitäre Transformationen festgelegt und diesen entsprechen unimodulare orthogonale Transformationen von α^1 , α^2 , α^3 . Nähere Bestimmung kann etwa so erfolgen dass¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \gamma^1 &= e^1_1 e^1_2 + e^1_2 e^1_1 & \bar{\varepsilon}^1 &= -e^1_1 e^2_2 - e^2_1 e^1_1 \\ \gamma^2 &= i e^1_1 e^2_2 - i e^2_1 e^1_1 & \bar{\varepsilon}^2 &= -i e^1_1 e^2_2 + i e^2_1 e^1_1 \\ \gamma^3 &= e^1_1 e^2_2 - e^2_1 e^1_1 & \bar{\varepsilon}^3 &= -e^1_1 e^1_2 + e^2_2 e^2_1 \end{aligned} \right\} . \quad . \quad (31)$$

Dass dabei die Vorzeichen in den γ und $\bar{\varepsilon}$ entgegengesetzt sind ist eine Folge von (28) und (30) und somit eine bei unitären Transformationen invariante Eigenschaft. Zu (30) und (31) gehören folgende Werte der β :

$$\left. \begin{aligned} \beta^{0c}_{..a} &= e^c_1 e^2_{..a} - e^c_2 e^1_{..a} & \bar{\beta}^{0c}_{..a} &= e^c_1 e^2_{..a} - e^c_2 e^1_{..a} \\ \beta^1 &= -e^1_1 e^1_2 + e^2_2 e^2_1 & \bar{\beta}^1 &= -e^1_1 e^1_2 + e^2_2 e^2_1 \\ \beta^2 &= -i e^1_1 e^2_2 + i e^2_1 e^1_1 & \bar{\beta}^2 &= i e^1_1 e^2_2 + i e^2_1 e^1_1 \\ \beta^3 &= e^2_1 e^1_2 + e^1_2 e^2_1 & \bar{\beta}^3 &= e^2_1 e^1_2 + e^1_2 e^2_1 \end{aligned} \right\} . \quad (32)$$

¹⁾ In (31) sowie in den letzten drei Gleichungen (32) und (33) sind die laufenden Indizes unterdrückt.

und der ι

$$\left. \begin{aligned} \iota_{0\alpha}^c &= e_1^c e_\alpha^1 + e_2^c e_\alpha^2; & \bar{\iota}_{0\mathfrak{A}}^\mathfrak{C} &= e_1^\mathfrak{C} e_{\mathfrak{A}}^1 + e_2^\mathfrak{C} e_{\mathfrak{A}}^2 \\ \iota_1 &= i e_1^c e^2 + i e_2^c e^1; & \bar{\iota}_1 &= -i e_1^\mathfrak{C} e^2 = i e_2^\mathfrak{C} e^1 \\ \iota_2 &= -e_1^c e^2 + e_2^c e^1; & \bar{\iota}_2 &= -e_1^\mathfrak{C} e^2 + e_2^\mathfrak{C} e^1 \\ \iota_3 &= i e_1^c e - i e_2^c e; & \bar{\iota}_3 &= -i e_1^\mathfrak{C} e + i e_2^\mathfrak{C} e \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Die Matrizen der ι sind also bis auf einen Faktor i den Paulischen Matrizen Gleich.

§ 3. Das Verschwinden der Divergenz des Wahrscheinlichkeitsvektors.

Jeder Spinvektor v lässt sich in einer und nur einer Weise in zwei von einander unabhängigen Komponenten v^c und $v^\mathfrak{C}$ in E_2 bzw. \bar{E}_2 zerlegen. Sind $\bar{v}^\mathfrak{C}$ und \bar{v}^c zu v^c bzw. $v^\mathfrak{C}$ konjugiert, so bestimmen diese einen neuen Spinvektor \bar{v} , den wir zu v konjugiert nennen. v und \bar{v} sind einander in eineindeutiger Weise zugeordnet. Jedem Spinvektor ist nun in eindeutiger Weise ein Vektor zugeordnet den wir mit v^k bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} v^k &= \beta_{\alpha\mathfrak{A}}^{kc} f_{cb} \bar{v}^\mathfrak{A} v^b + \bar{\beta}_{\alpha\mathfrak{A}}^{k\mathfrak{C}} \bar{f}_{\mathfrak{CB}} \bar{v}^\mathfrak{A} v^\mathfrak{C} \\ &= e_{\mathfrak{b}\mathfrak{A}}^k (\bar{v}^\mathfrak{A} v^b + v^\mathfrak{A} \bar{v}^b) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

und aus der Hermiteschen Symmetrie folgt, dass dieser Vektor *reell* ist.

Wir wenden uns jetzt zur allgemeinen Wellengleichung, die aus (2) entsteht indem $\frac{h}{i} \partial_i$ durch $\frac{h}{i} \partial_i + \Phi_i$ ersetzt wird

$$\left\{ \alpha^j \left(\frac{h}{i} \partial_j + \Phi_j \right) + \frac{mc}{i} \alpha^4 \right\} \psi = 0. \quad (35)$$

Sind dann ψ^c und $\psi^\mathfrak{C}$ die Komponenten des Spinvektors ψ , so ist (35) gleichbedeutend mit

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\alpha\mathfrak{A}}^{jc} \left(\frac{h}{i} \partial_j + \Phi_j \right) \psi^\mathfrak{A} - mc \psi^c &= 0 \\ \bar{\beta}_{\alpha\mathfrak{A}}^{j\mathfrak{C}} \left(\frac{h}{i} \partial_j + \Phi_j \right) \psi^\mathfrak{A} + mc \psi^\mathfrak{C} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Wird die erste Gleichung mit $\psi^b f_{bc}$ überschoben, so entsteht

$$\bar{\psi}^b \epsilon_{bc}^j \left(\frac{h}{i} \partial_j + \Phi_j \right) \psi^\mathfrak{A} - mc \bar{\psi}^b f_{bc} \psi^c \quad (37)$$

und Subtraktion der komplex konjugierten Gleichung

$$\psi^{\mathfrak{B}} \varepsilon^j_{\mathfrak{B}\alpha} \left(-\frac{\hbar}{i} \partial_j + \Phi_j \right) \bar{\psi}^{\alpha} - m c \psi^{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \bar{\psi}^{\mathfrak{C}} \Big\} . . . \quad (38)$$

liefert

$$\frac{\hbar}{i} \partial_j \varepsilon^j_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} \bar{\psi}^{\mathfrak{b}} \psi^{\mathfrak{a}} - m c \left(\bar{\psi}^{\mathfrak{b}} \psi^{\mathfrak{c}} f_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} - \psi^{\mathfrak{B}} f_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \bar{\psi}^{\mathfrak{C}} \right) . . . \quad (39)$$

In derselben Weise entsteht aus der zweiten Gleichung (36):

$$\frac{\hbar}{i} \partial_j \varepsilon^j_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} \psi^{\mathfrak{b}} \bar{\psi}^{\mathfrak{a}} + m c (\bar{\psi}^{\mathfrak{B}} \psi^{\mathfrak{C}} f_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} - \psi^{\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \bar{\psi}^{\mathfrak{c}}) . . \quad (40)$$

und durch Addition von (39) und (40)

$$\partial_j \psi^j = \partial_j \varepsilon^j_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} (\psi^{\mathfrak{b}} \bar{\psi}^{\mathfrak{a}} + \bar{\psi}^{\mathfrak{b}} \psi^{\mathfrak{a}}) = 0 \quad (41)$$

womit die Divergenzfreiheit des Wahrscheinlichkeitsvektors ohne Verwendung irgendeines speziellen Koordinatensystems in E_2 und \bar{E}_2 bewiesen ist.

Physics. — On the structure of the spectrum of ionized Argon (Ar. II).

By T. L. DE BRUIN. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN.)

(Communicated at the meeting of February 22, 1930.)

1. Introduction.

In former papers in these Proceedings ¹⁾ I have communicated a partial analysis of the spectrum of ionized Argon (Ar. II), dealing with the main spectral terms which are in excellent accord with the theoretical expectations. It was possible to account for 180 lines of the spectrum.

The present paper deals with a further analysis, which was greatly facilitated by the investigations on the ZEEMAN-effect in this laboratory ²⁾. The published data of a list of unclassified lines and some unpublished data give the starting point for the detection of the other termsystems which may be expected according to the theory of the complex spectra.

2. Wavelength measurements.

Our spectrograms had already shown that many more Ar. II lines can be obtained than are reported by former observers. We undertook therefore a new measurement of the whole spectrum. This work was already finished for a large part. More recently ROSENTHAL ³⁾ has published an extensive list of lines of the "blue" Argonspectrum. Our spectrograms show the higher stages of ionisation (Ar III, IV) much more developed. Our measurements are in very good agreement with the determinations reported by ROSENTHAL. Because his dispersion is somewhat larger (we had a dispersion $8,8 \text{ \AA/m.m.}$) we prefer his data and we have used it in the further analysis.

For the interpretation of the extreme ultra violet spectrum the measurements of COMPTON, BOYCE and RUSSELL ⁴⁾ have been used.

3. Structure of the spectrum.

The energy levels of the single ionized Argonatom (Ar. II) are built upon the ground levels of the double ionized atom (Ar. III). These ground levels are: 3P , 1D and 1S . According to the theory of the complex

¹⁾ T. L. DE BRUIN: *Proceedings Amsterdam* **31**, 593, 1928, **31**, 771, 1928.

²⁾ C. J. BAKKER, T. L. DE BRUIN and P. ZEEMAN: *Proceedings Amsterdam* **31**, 780, 1928.

³⁾ A. H. ROSENTHAL: *Annalen der Physik.* (5) **4**, S. 49, 1930.

⁴⁾ K. T. COMPTON, J. C. BOYCE and H. N. RUSSELL: *Phys. Rev.* **32**, 179, 1928.

spectra the following energy levels in the Ar. II atom can be expected. (Table 1).

TABLE I. Energy levels Ar II.

Electronic configuration									Symbol	Basic term: 3P		Basic term: 1D	Basic term: 1S
1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d		Terms		Terms	Terms
										Quartet	Doublet	Doublet	Doublet
2	2	6	2	5					$s^2 p^5$		P		
2	2	6	2	4	1				$s^2 p^4 . 3d$	F D P	F D P	G F D P S	D
2	2	6	2	4		1			$s^2 p^4 . 4s$	P	P	D	S
2	2	6	2	4			1		$s^2 p^4 . 4p$	D P S	D P S	F D P	P
2	2	6	2	4				1	$s^2 p^4 . 4d$	F D P	F D P	G F D P S	D
2	2	6	2	4				1	$s^2 p^4 . 5s$	P	P	D	S

One expects thus three term systems:

- (^3P) 3 p, 4 p, 5 p, 3 d, 4 d, 4 s, 5 s ... 72 levels.
- (^1D) 4 p, 5 p, 3 d, 4 d, 4 s, 5 s ... 34 levels.
- (^1S) 4 p, 5 p, 3 d, 4 d, 4 s, 5 s ... 10 levels.

In the former paper we have reported of the first group 46 levels. This term system with limit 3P is now extended. The 3 d- and 5 p-levels have been added in the present paper and further higher levels originating in a 6 s- and 5 d-coupling have been detected.

Table 2 (see p. 200) presents all the levels with limit 3P .

The detection of the term group 2F , 2D , 2P with limit 1D made it possible to extend the analysis. As an example several combinations with these levels are presented in table 3. (See p. 202).

Table 4 (see p. 204) contains the term levels belonging to the second term system with limit 1D .

Table 5 (see p. 204) presents the terms which belong to the third system with limit 1S .

Some other terms have been detected but it was not yet possible to determine the nature of these levels f.i.

$$a \ ^2P_2 = 45162,50$$

$$339,80$$

$$a \ ^2P_1 \equiv 44822,70$$

The interpretation of these levels should be reserved. It is quite possible that still other atom configurations play a role.

The Ar. II spectrum gives interesting data for the theory of series limits, inverted and not inverted terms, anormal coupling, etc. We will report over this subject in a later paper.

TABLE 2. Termtable Ar II (Limit $3P$).

Nº.	Term	Termvalue	Term difference	Theory	Nº.	Term	Termvalue	Term difference	Theory
1	$2P_2$	224721	1431	} 3p	36	$2P_2$	64515.02	-532.96	} 4p
2	$2P_1$	223290			37	$2P_1$	65047.98		
3	$4D_4$	92427.28	153.98	} 3d	38	$4D_4$	41079.08	121.80	} 4d
4	$4D_3$	92273.30	149.62		39	$4D_3$	40957.28	188.61	
5	$4D_2$	92123.68	107.03		40	$4D_2$	40768.67	206.29	
6	$4D_1$	92016.65	-612.43		41	$4D_1$	40562.38	155.12	
7	$2D_3$	73667.15			42	$2D_3$	32197.69		
8	$2D_2$	74279.58	530.59		43	$2D_2$	32042.57	531.55	
9	$4F_5^{1)}$	82568.08			44	$4F_5$	39661.58		
10	$4F_4$	82037.49	390.62		45	$4F_4$	39130.03	449.59	
11	$4F_3$	81646.87	263.85		46	$4F_3$	38680.44	266.33	
12	$4F_2$	81383.02	225.65		47	$4F_2$	38414.11	-299.00	
13	$4P_1$	79543.06			48	$4P_1$	38583.18		
14	$4P_2$	79768.71	491.55		49	$4P_2$	38284.18	-420.60	
15	$4P_3$	80260.26	653.89		50	$4P_3$	37863.58	772.50	
16	$2F_4$	75260.70?			51	$2F_4$	37938.38		
17	$2F_3$	74606.87	-958.91		52	$2F_3$	37165.18	-658.00	
18	$2P_1$	80044.50			53	$2P_1$	34819.88		
19	$2P_2$	79085.59	844.40	54	$2P_2$	34161.88	627.76		
20	$4P_3$	90512.88		} 4s	55	$4P_3$		43160.38	} 5s
21	$4P_2$	89668.48			56	$4P_2$		42532.62	
22	$4P_1$	89152.78			57	$4P_1$		41803.48	
23	$2P_2$	86510.88			58	$2P_2$		41664.18	
24	$2P_1$	85496.14	1014.74		59	$2P_1$	40840.18	824.00	

1) This term $3d\ 4F$ is also found by ROSENTHAL.

TABLE 2 (Continued).

Nº.	Term	Termvalue	Term difference	Theory	Nº.	Term	Termvalue	Term difference	Theory
25	4P_3	69711.13	307.75	4p	60	$^4P_3^{(1)}$	35595.29	251.19	5p
26	4P_2	69403.38	357.30		61	4P_2	35344.10	288.90	
27	4P_1	69046.08			62	4P_1	35055.20		
28	4D_4	67520.58	439.36		63	$^4D_4^{(1)}$	34769.50	383.07	
29	4D_3	67081.22	494.57		64	4D_3	34386.43	405.01	
30	4D_2	66586.65	260.32		65	4D_2	33981.42	489.98	
31	4D_1	66326.33			66	4D_1	33491.44		
32	2D_3	66024.28	663.09		67	2D_3			
33	2D_2	65361.19			68	2D_2	34247.42		
34	4S_2	63705.60			69	4S_2			
35	2S_1	63665.08			70	2S_1	33047.50		
	4P_3	25942.33	325.75	6s	71	2P_2	34648.66	89.96	5p
	4P_2	25616.58	972.24		72	2P_1	34558.70		
	4P_1	24644.34				2P_2	20337.50	97.90	5d
	2P_2	24722.85	591.35			2P_1	20239.60		
	2P_1	24131.50				2D_3	20169.10		5d

Table 6 (see p. 205) contains a list of new classified lines.

From the termtables and the resonance lines it is now possible to calculate and to interpret the spectrum in the extreme ultra violet. COMPTON, BOYCE and RUSSELL have already given an interpretation of several of these lines. The present classification deviates in several points from that given by those authors.

Table 7 (see p. 210) presents the classification of the extreme ultra violet spectrum.

The following figure gives a survey of the three term systems. For

1) These terms 3d 4P , 5p 4P and 5p 4D are given by ROSENTHAL. It seems however that a farther verification of these terms is necessary.

TABLE 3.

$4p\ ^1D$	2F_4 54224.21	2F_3 54353.62	2P_2 52540.70	2P_1 51938.20	2D_3 51361.07	2D_2 51406.72
		000.u	8.	5.	2.	2.
$4s\ ^2P_2\ (^3P)$		3108.82	2942.90	2891.61	2844.12	2847.81
86510.88	—	32157.25	33970.18	34572.70	35149.95	35104.41
			6.	6.		4.
$4s\ ^2P_1\ (^3P)$			3033.52	2979.05		2932.60
85496.14	—	—	32955.44	33557.99	—	34089.49
		9.	7.	8.	6.	8.
$4s\ ^2D_2\ (^1D)$		4589.93	4237.23	4131.73	4035.47	4042.91
76134.36	—	21780.74	23593.70	24196.13	24773.29	24727.70
		15.	6.	8.	9.	4.
$4s\ ^2D_3\ (^1D)$	4609.60	4637.25	4277.55		4072.01	4079.60
75912.01	21687.80	21558.49	23371.31	—	24550.99	24505.31
			4.	5.		4.
$3d\ ^2P_1\ (^3P)$			3634.83	3556.91		3490.89
80044.50	—	—	27503.79	28106.29	—	28637.82
		1.	5.	4.	6.	4.
$3d\ ^2P_2\ (^3P)$		4042.20	3766.13	3682.55	3605.89	3611.84
79085.59	—	24732.04	26544.94	27147.32	27724.53	27678.85
$3d\ ^2F_4\ (^3P)$			—	—		—
		6.	00.u	4.	6.	2.
$3d\ ^2F_3\ (^3P)$	4904.75	4936.13	4530.57		4300.66	4309.11
74606.87	20382.72	20253.15	22066.11	—	23245.73	23200.15
		6.	5.	6.	5	6.
$3d\ ^2D_2\ (^3P)$		5017.16	4598.77	4474.77	4362.07	4370.76
74279.58	—	19926.05	21738.88	22341.27	22918.47	22872.91
		6.	3.	5.	8.	5.
$3d\ ^2D_3\ (^3P)$	5141.83	5176.28	4732.08		4481.83	4490.99
73667.15	19442.89	19313.53	21126.46	—	22306.08	22260.58

TABLE 3 (Continued).

	7.		4.		6.	3.
3d 2D_3 (1S)	3946.10		4227.02		4448.88	4448.10
28889.89	25334.33	25463.73	23650.69	—	22471.28	22515.71
		3.	2.	6.	1.	3.
3d 2D_2 (1S)		3925.71	4226.65	4337.10	4448.47	4439.50
28887.82	—	25465.91	23652.76	23050.42	22473.35	22518.70
	6.					
4d 2G_5 (1D)	3561.04					
26150.72	28073.69	—	—	—	—	—
	4.	9.				
4d 2G_4 (1D)	3562.19	3545.84				
26159.59	28064.63	28194.03	—	—	25201.48	—
	7.	3.			6.	
4d 2F_4 (1D)	3376.46	3361.73			3737.89	
24615.66	29608.34	29738.08	—	—	26745.49	—
	4.	6.	1.		4.	6.
4d 2F_3 (1D)	3365.54	3350.94	3567.78		3724.51	3718.21
24519.80	29704.41	29833.83	28020.66	—	26841.56	26887.04
	3.	3.	6.		6.	4.
4d 2D_3 (1D)	3429.64	3414.46	3639.85		3803.19	3796.60
25074.92	29149.25	29278.84	27465.86	—	26286.28	26331.91
		2.	6.		5.	4.
4d 2D_2 (1D)		3432.64	3660.44		3825.70	3819.04
25229.54	—	29123.78	27311.37	26708.66	26131.62	26177.19
			3.	3.		5.
4d 2P_1 (1D)			3671.01	3754.06		3830.43
25307.94	—	—	27232.73	26630.29	—	26099.35
		5.	2.	5.		4.
4d 2P_2 (1D)		3379.48	3600.22	3680.06		3753.53
24772.54	—	29581.88	27768.19	27165.76	26588.53	26634.05
			4.	4.		
4d 2S_1 (1D)			3026.75	3082.99		
19511.54	—	—	33029.15	32426.66	—	31895.18

TABLE 4. Termtable Ar II (Limit $1D$).

N ^o .	Term	Termvalue	Term difference	Theory	N ^o .	Term	Termvalue	Term difference	Theory	
73	² G ₅		494.55	3d	90	² G ₅	26150.72	-8.87	4d	
74	² G ₄				91	² G ₄	26159.59			
75	² F ₄				92	² F ₄	24615.66	95.86		
76	² F ₃	53644.71			93	² F ₃	24519.80			
77	² D ₃	52419.08			94	² D ₃	25074.92	-154.62		
78	² D ₂	51924.53			95	² D ₂	25229.54			
79	² P ₂	50344.60			424.67	96	² P ₂	24772.54		-535.40
80	² P ₁	49919.93				97	² P ₁	25307.94		
81	² S ₁	40661.40		98	² S ₁	19511.54				
82	² D ₃	75912.01	-222.35	4s	99	² D ₃	38027.00	22.64	5s	
83	² D ₂	76134.36			100	² D ₂	38004.36			
84	² F ₄	54224.21	-129.41	4p	101	² F ₄	29871.52	-21.61	5p	
85	² F ₃	54353.62			102	² F ₃	29893.13			
86	² P ₂	52540.70	602.50		103	² P ₂	28993.46	329.00		
87	² P ₁	51938.20			104	² P ₁	28664.46			
88	² D ₃	51361.07	-45.65		105	² D ₃	28121.46	-11.32		
89	² D ₂	51406.72			106	² D ₂	28132.78			

TABLE 5. Termtable Ar II (Limit $1S$).

4s $2S_1$ (1S)	57446.84	358.93
4p $2P_1$ (1S)	32421.41	
4p $2P_2$ (1S)	32780.34	
3d $2D_3$ (1S)	28889.89	2.07
3d $2D$ (1S)	28887.82	

TABLE 6.
Classification of Ar II lines.

Int	λ I.Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination	Int	λ I.Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination
1	7617.86	13123.43	$4p^2P_1 ({}^3P) - 3d^2D_2 ({}^1D)$	3	6123.38	16326.34	$4p^2F_3 ({}^1D) - 5s^2D_3 ({}^1D)$
0	7440.54	13436.19	$4p^2D_2 ({}^3P) - 3d^2D_2 ({}^1D)$	00	6120.12	16335.04	$3d^4F_2 ({}^3P) - 4p^2P_1 ({}^3P)$
2	7348.11	13605.20	$4p^2D_3 ({}^3P) - 3d^2D_3 ({}^1D)$	10	6114.92	16348.93	$4p^2F_3 ({}^1D) - 5s^2D_2 ({}^1D)$
0	7284.27	13724.44	$3d^2P_2 ({}^3P) - 4p^2D_2 ({}^3P)$	4	6103.56	16379.36	$3d^2P_1 ({}^3P) - 4p^2S_1 ({}^3P)$
000	7090.55	14099.40	$4p^2D_3 ({}^3P) - 3d^2D_2 ({}^1D)$	00	6077.43	16449.78	$4s^2P_1 ({}^3P) - 4p^4P_1 ({}^3P)$
1	7077.03	14126.33	$3d^4F_3 ({}^3P) - 4p^4D_4 ({}^3P)$	00. u	6044.43	16529.58	$4p^2D_2 ({}^3P) - a^2P_1$
2	7055.01	14170.42	$4p^2P_2 ({}^3P) - 3d^2P_2 ({}^1D)$	0	5950.91	16799.51	$4s^2P_2 ({}^3P) - 4p^4P_3 ({}^3P)$
2	6990.16	14301.89	$3d^4F_2 ({}^3P) - 4p^4D_3 ({}^3P)$	00. u	5843.80	17107.42	$4s^2P_2 ({}^3P) - 4p^4P_2 ({}^3P)$
6	6886.57	14517.02	$3d^4F_4 ({}^3P) - 4p^4D_4 ({}^3P)$	0	5812.81	17198.63	$4p^2D_3 ({}^1D) - 4d^2P_2 ({}^3P)$
6	6863.52	14565.77	$3d^4F_3 ({}^3P) - 4p^4D_3 ({}^3P)$	0. u	5724.37	17464.34	$4s^2P_2 ({}^3P) - 4p^4D_2 ({}^3P)$
4	6861.30	14570.48	$3d^2P_2 ({}^3P) - 4p^2P_2 ({}^3P)$	2	5577.76	17923.57	$3d^2P_2 ({}^1D) - 4p^2P_2 ({}^1S)$
4	6818.39	14662.18	$4p^4D_2 ({}^3P) - 3d^2D_2 ({}^1D)$	0. u	5625.74	17770.52	$3d^2D_3 ({}^1D) - 5p^2P_2 ({}^3P)$
3	6808.55	14683.37	$3d^2P_1 ({}^3P) - 4p^2D_2 ({}^3P)$	1	5691.71	17564.55	$3d^2P_2 ({}^1D) - 4p^2P_2 ({}^1S)$
2	6799.32	14703.30	$4p^2P_1 ({}^3P) - 3d^2P_2 ({}^1D)$	3	5305.77	18842.17	$4p^2S_1 ({}^3P) - a^2P_1$
5	6756.61	14796.24	$3d^4F_2 ({}^3P) - 4p^4D_2 ({}^3P)$	3	5216.84	19163.37	$4p^2D_3 ({}^1D) - 4d^2D_3 ({}^3P)$
8	6684.36	14956.17	$3d^4F_4 ({}^3P) - 4p^4D_3 ({}^3P)$	0	5204.46	19208.96	$4p^2D_2 ({}^1D) - 4d^2D_3 ({}^3P)$
5	6666.36	14996.55	$3d^2P_1 ({}^3P) - 4p^2P_1 ({}^3P)$	3	5176.28	19313.53	$3d^2D_3 ({}^3P) - 4p^2F_3 ({}^1D)$
10	6643.79	15047.50	$3d^4F_5 ({}^3P) - 4p^4D_4 ({}^3P)$	5	5165.82	19352.64	$4p^2P_2 ({}^3P) - a^2P_2$
7	6639.72	15056.73	$3d^4F_2 ({}^3P) - 4p^4D_1 ({}^3P)$	1	5162.80	19363.96	$4p^2D_2 ({}^1D) - 4d^2D_2 ({}^3P)$
8	6638.24	15060.08	$3d^4F_3 ({}^3P) - 4p^4D_2 ({}^3P)$	6	5141.84	19442.89	$3d^2D_3 ({}^3P) - 4p^2F_4 ({}^1D)$
00	6509.16	15358.73	$3d^4F_2 ({}^3P) - 4p^2D_3 ({}^3P)$	0	5125.84	19503.58	$3d^2D_2 ({}^1D) - 4p^2P_1 ({}^1S)$
3	6500.25	15379.79	$3d^2P_2 ({}^3P) - 4p^4S_2 ({}^3P)$	2	5017.63	19924.19	$4s^2P_2 ({}^3P) - 4p^4D_2 ({}^3P)$
6	6483.10	15420.47	$3d^2P_2 ({}^3P) - 4p^2S_1 ({}^3P)$	6	5017.16	19926.05	$3d^2D_2 ({}^3P) - 4p^2F_3 ({}^1D)$
2	6437.63	15529.38	$3d^2P_1 ({}^3P) - 4p^2P_2 ({}^3P)$	2	4949.45	20198.64	$4p^2D_2 ({}^3P) - a^2P_2$
4	6399.23	15622.57	$3d^4F_3 ({}^3P) - 4p^2D_3 ({}^3P)$	4	4942.96	20225.16	$4p^2P_1 ({}^3P) - a^2P_1$
0	6376.00	15679.49	$4p^2D_3 ({}^3P) - 3d^2P_2 ({}^1D)$	00. u	4936.13	20253.15	$3d^2F_3 ({}^3P) - 4p^2F_3 ({}^1D)$
6	6243.13	16013.19	$3d^4F_4 ({}^3P) - 4p^2D_3 ({}^3P)$	2	4914.32	20343.03	$4p^2P_2 ({}^1D) - 4d^2D_3 ({}^3P)$
2	6239.73	16021.19	$3d^4F_2 ({}^3P) - 4p^2D_2 ({}^3P)$	6	4904.75	20382.72	$3d^2F_3 ({}^3P) - 4p^2F_4 ({}^1D)$
7	6172.28	16197.00	$4p^2F_4 ({}^1D) - 5s^2D_3 ({}^1D)$	0	4888.29	20451.47	$3d^2P_2 ({}^1D) - 5p^2F_3 ({}^1D)$
3	6138.68	16285.68	$\left. \begin{matrix} 3d^4F_3 ({}^3P) - 4p^2D_2 ({}^3P) \\ 4p^2F_4 ({}^1D) - 4d^2F_4 ({}^3P) \end{matrix} \right\}$	0. u	4877.08	20498.37	$4p^2P_3 ({}^1D) - 4d^2D_2 ({}^3P)$

TABLE 6 (Continued).

Int	λ I. Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination	Int	λ I. Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination
3	4867.59	20538.33	$4p\ ^1D_2\ (^3P) - a\ ^2P_1$	5	4433.83	22547.56	$3d\ ^2D_3\ (^1D) - 5p\ ^2F_4\ (^1D)$
5	4792.12	20861.78	$4p\ ^2D_3\ (^3P) - a\ ^2P_2$	1. u	4401.74	22711.93	$4p\ ^2P_2\ (^3P) - 5s\ ^4P_1\ (^3P)$
5	4732.08	21126.46	$3d\ ^2D_3\ (^3P) - 4p\ ^2P_2\ (^1D)$	2. u	4394.65	22748.57	$4p\ ^4S_2\ (^3P) - 4d\ ^4D_3\ (^3P)$
2	4730.69	21132.67	$4p\ ^2S_1\ (^3P) - 5s\ ^4P_2\ (^3P)$	4	4385.08	22798.22	$4s\ ^2S_1\ (^1S) - 5p\ ^2P_2\ (^3P)$
4	4703.36	21255.47	$3d\ ^2P_1\ (^1D) - 5p\ ^2P_2\ (^1D)$	1	4379.25	22828.56	$4p\ ^2D_2\ (^3P) - 5s\ ^4P_2\ (^3P)$
4	4682.29	21351.11	$3d\ ^2P_2\ (^1D) - 5p\ ^2P_2\ (^1D)$	0	4372.50	22863.81	$4p\ ^2D_3\ (^3P) - 5s\ ^4P_3\ (^3P)$
1	4681.52	21344.63	$4p\ ^2P_2\ (^3P) - 5s\ ^4P_3\ (^3P)$	0. u	4372.09	22865.95	$4p\ ^4S_2\ (^3P) - 5s\ ^2P_1\ (^3P)$
2. u	4666.28	21424.37	$4p\ ^4D_2\ (^3P) - a\ ^2P_2$	6	4370.76	22872.91	$3d\ ^2D_2\ (^3P) - 4p\ ^2D_2\ (^1D)$
0. u	4649.06	21503.72	$4p\ ^4D_1\ (^3P) - a\ ^2P_1$	5	4367.87	22888.05	$4s\ ^2S_1\ (^1S) - 5p\ ^2P_1\ (^3P)$
6	4637.25	21558.49	$4s\ ^2D_3\ (^1D) - 4p\ ^2F_3\ (^1D)$	5	4362.07	22918.47	$3d\ ^2D_2\ (^3P) - 4p\ ^2D_3\ (^1D)$
3	4611.25	21680.04	$3d\ ^2P_1\ (^1D) - 5p\ ^2P_1\ (^1D)$	2	4359.67	22931.09	$3d\ ^2D_2\ (^1D) - 5p\ ^2P_2\ (^1D)$
15	4609.60	21687.80	$4s\ ^2D_3\ (^1D) - 4p\ ^2F_4\ (^1D)$	1	4338.24	23044.37	$4p\ ^4S_2\ (^3P) - 3d\ ^2S_1\ (^1D)$
5	4598.77	21738.88	$3d\ ^2D_2\ (^3P) - 4p\ ^2P_2\ (^1D)$	6	4337.10	23050.42	$4p\ ^2P_1\ (^1D) - 3d\ ^2D_2\ (^1S)$
2	4593.44	21764.10	$4p\ ^4D_2\ (^3P) - a\ ^2P_1$	3	4309.25	23199.39	$4s\ ^2S_1\ (^1S) - 5p\ ^2D_2\ (^3P)$
9	4589.93	21780.74	$4s\ ^2D_2\ (^1D) - 4p\ ^2F_3\ (^1D)$	2	4309.11	23200.15	$3d\ ^2F_3\ (^3P) - 4p\ ^2D_2\ (^1D)$
0	4588.42	21787.91	$3d\ ^2P_1\ (^1D) - 5p\ ^2D_2\ (^1D)$	6	4300.66	23245.73	$3d\ ^2F_3\ (^3P) - 4p\ ^2D_3\ (^1D)$
1	4572.92	21861.76	$4p\ ^2S_1\ (^3P) - 5s\ ^4P_1\ (^3P)$	5	4297.99	23260.17	$3d\ ^2D_2\ (^1D) - 5p\ ^2P_1\ (^1D)$
4	4561.03	21918.75	$4p\ ^4D_3\ (^3P) - a\ ^2P_2$	8	4277.55	23371.31	$4s\ ^2D_3\ (^1D) - 4p\ ^2P_2\ (^1D)$
1. u	4538.73	22026.44	$4p\ ^2F_4\ (^1D) - 4d\ ^2D_3\ (^3P)$	0	4267.73	23425.09	$3d\ ^2D_3\ (^1D) - 5p\ ^2P_2\ (^1D)$
4	4537.67	22031.58	$3d\ ^2D_2\ (^1D) - 5p\ ^2F_3\ (^1D)$	2. u	4243.71	23557.68	$4p\ ^2D_2\ (^3P) - 5s\ ^4P_1\ (^3P)$
4	4530.57	22066.11	$3d\ ^2F_3\ (^3P) - 4p\ ^2P_2\ (^1D)$	7	4237.23	23593.70	$4s\ ^2D_2\ (^1D) - 4p\ ^2P_2\ (^1D)$
5	4498.55	22223.17	$3d\ ^2P_2\ (^1D) - 5p\ ^2D_3\ (^1D)$	4	4227.02	23650.69	$4p\ ^2P_2\ (^1D) - 3d\ ^2D_3\ (^1S)$
5	4490.99	22260.58	$3d\ ^2D_3\ (^3P) - 4p\ ^2D_2\ (^1D)$	2	4226.65	23652.76	$4p\ ^2P_2\ (^1D) - 3d\ ^2D_2\ (^1S)$
8	4481.83	22306.08	$3d\ ^2D_3\ (^3P) - 4p\ ^2D_3\ (^1D)$	2	4201.58	23793.88	$4p\ ^4D_1\ (^3P) - 5s\ ^4P_2\ (^3P)$
0. u	4480.85	22310.95	$4p\ ^2F_3\ (^1D) - 4d\ ^2D_2\ (^3P)$	3	4199.93	23803.24	$3d\ ^2D_2\ (^1D) - 5p\ ^2D_3\ (^1D)$
6	4474.77	22341.27	$3d\ ^2D_2\ (^3P) - 4p\ ^2P_1\ (^1D)$	1. u	4147.43	24104.54	$4s\ ^4P_1\ (^3P) - 4p\ ^2P_1\ (^3P)$
6	4448.88	22471.28	$4p\ ^2D_3\ (^1D) - 3d\ ^2D_3\ (^1S)$	8	4131.73	24196.13	$4s\ ^2D_2\ (^1D) - 4p\ ^2P_1\ (^1D)$
1	4448.47	22473.35	$4p\ ^2D_3\ (^1D) - 3d\ ^2D_2\ (^1S)$	00. u	4127.09	24223.34	$4p\ ^4P_1\ (^3P) - a\ ^2P_1$
3	4440.09	22515.77	$4p\ ^2D_2\ (^1D) - 3d\ ^2D_3\ (^1S)$	0	4124.09	24009.64	$4p\ ^4P_2\ (^3P) - a\ ^2P_2$
1	4438.12	22525.76	$3d\ ^2D_3\ (^1D) - 5p\ ^2F_3\ (^1D)$	4	4116.39	24286.30	$3d\ ^2D_3\ (^1D) - 5p\ ^2D_2\ (^1D)$
3	4439.45	22519.01	$4p\ ^2D_2\ (^1D) - 3d\ ^2D_2\ (^1S)$	2	4114.52	24297.34	$3d\ ^2D_3\ (^1D) - 5p\ ^2D_3\ (^1D)$

TABLE 6 (Continued)

Int	λ I. Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination	Int	λ I. Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination
3	4099.47	24386.54	$4p^2P_1(^3P) - 3d^2S_1(^1D)$	4	3753.53	26634.05	$4p^2D_2(^1D) - 4d^2P_2(^1D)$
3	4097.15	24400.35	$4s^2S_1(^1S) - 5p^2S_1(^3P)$	0	3751.06	26651.58	$4p^2P_2(^3P) - 4d^4P_3(^3P)$
000	4096.47	24404.40	$4p^2D_2(^3P) - 4d^4D_3(^3P)$	4	3746.46	26684.31	$4p^2D_2(^1D) - 6s^2P_2(^3P)?$
5	4079.60	24505.31	$4s^2D_3(^1D) - 4p^2D_2(^1D)$	0	3741.21	26721.75	$4p^2D_3(^3P) - 4d^4P_3(^3P)$
9	4072.01	24550.99	$4s^2D_3(^1D) - 4p^2D_3(^1D)$	6	3737.89	26745.49	$4p^2D_3(^1D) - 4d^2F_4(^1D)$
0. u	4057.72	24637.45	$4s^4P_1(^3P) - 4p^2P_2(^3P)$	0. u	3733.36	26777.94	$4p^2D_2(^3P) - 4d^4P_1(^3P)$
0	4053.56	24662.73	$4p^4D_1(^3P) - 5s^2P_2(^3P)$	4	3724.51	26841.56	$4p^2D_3(^1D) - 4d^2F_3(^1D)$
5	4052.94	24666.50	$4s^2S_1(^1S) - 4p^2P_2(^1S)$	6	3718.21	26887.04	$4p^2D_2(^1D) - 4d^2F_3(^1D)$
3	4047.51	24699.60	$4p^2D_2(^3P) - 3d^2S_1(^1D)$	2	3713.03	26924.55	$4p^2P_2(^1D) - 6s^4P_2(^3P)?$
8	4042.91	24727.70	$4s^2D_2(^1D) - 4p^2D_2(^1D)$	4	3706.94	26968.78	$3d^4D_1(^3P) - 4p^2P_1(^3P)$
1	4042.20	24732.04	$3d^2P_2(^3P) - 4p^2F_3(^1D)$	0. u	3692.33	27075.49	$3d^4D_2(^3P) - 4p^2P_1(^3P)$
6	4035.47	24773.29	$4s^2D_2(^1D) - 4p^2D_3(^1D)$	4	3682.56	27147.32	$3d^2P_2(^3P) - 4p^2P_1(^1D)$
1	4007.66	24945.19	$4p^2D_3(^3P) - 4d^4D_4(^3P)$	5	3680.06	27165.76	$4p^2P_1(^1D) - 4d^2P_2(^1D)$
5	3994.81	25025.43	$4s^2S_1(^1S) - 4p^2P_1(^1S)$	4	3673.26	27216.05	$4p^2P_1(^1D) - 6s^2P_2(^3P)?$
7	3946.10	25334.33	$4p^2F_4(^1D) - 3d^2D_3(^1S)$	3	3671.01	27232.73	$4p^2P_2(^1D) - 4d^2P_1(^1D)$
0	3933.19	25417.49	$4p^4D_3(^3P) - 5s^2P_2(^3P)$	6	3660.44	27311.37	$4p^2P_2(^1D) - 4d^2D_2(^1D)$
3	3925.71	25465.91	$4p^2F_3(^1D) - 3d^2D_2(^1S)$	6	3655.29	27349.85	$4p^2P_2(^3P) - 4d^2F_3(^3P)$
1. u	3922.54	25486.49	$4s^4P_1(^3P) - 4p^2S_1(^3P)$ $4p^4D_1(^3P) - 5s^2P_1(^3P)$	7	3639.85	27465.86	$4p^2P_2(^1D) - 4d^2D_3(^1D)$
2	3895.26	25664.98	$4p^4D_1(^3P) - 3d^2S_1(^1D)$	00. u	3635.13	27501.52	$3d^4D_1(^3P) - 4p^2P_2(^3P)$
00. u	3893.14	25678.96	$4p^4S_2(^3P) - 5s^2D_3(^1D)$	4	3634.83	27503.79	$3d^2P_1(^3P) - 4p^2P_2(^1D)$
1	3856.16	25924.21	$4p^4D_2(^3P) - 3d^2S_1(^1D)$	0	3621.06	27608.38	$3d^4D_2(^3P) - 4p^2P_2(^3P)$
0	3855.18	25931.80	$4p^2P_2(^3P) - 4d^4P_1(^3P)$	0	3620.82	27610.21	$3d^4F_2(^3P) - 4p^2D_3(^3P)$
5	3830.43	26099.35	$4p^2D_2(^1D) - 4d^2P_1(^1D)$	4	3611.84	27678.85	$3d^2P_2(^3P) - 4p^2D_2(^1D)$
5	3825.70	26131.62	$4p^2D_3(^1D) - 4d^2D_2(^1D)$	6	3605.89	27724.53	$3d^2P_2(^3P) - 4p^2D_3(^1D)$
4	3819.04	26177.19	$4p^2D_2(^1D) - 4d^2D_2(^1D)$	4	3601.51	27758.24	$3d^4D_3(^3P) - 4p^2P_2(^3P)$
1	3811.22	26230.90	$4p^2P_2(^3P) - 4d^4P_2(^3P)$	3	3600.22	27768.19	$4p^2P_2(^1D) - 4d^2P_2(^1D)$
6	3803.19	26286.28	$4p^2D_2(^1D) - 4d^2D_3(^1D)$	00. u	3594.41	27813.07	$3d^2F_4(^3P) - 4p^2F_4(^1D)$
4	3796.60	26331.91	$4p^2D_3(^1D) - 4d^2D_3(^1D)$	00. u	3593.76	27818.10	$4p^2P_2(^1D) - 6s^2P_2(^3P)$
2	3777.55	26464.70	$4p^2P_1(^3P) - 4d^4P_1(^3P)$	00. u	3570.77	27997.20	$4p^2D_3(^3P) - 5s^2D_3(^1D)$
5	3766.13	26544.94	$3d^2P_2(^3P) - 4p^2P_2(^1D)$	1	3569.94	28003.71	$4p^4D_2(^3P) - 4d^4P_1(^3P)$
3	3754.06	26630.29	$4p^2P_1(^1D) - 4d^2P_1(^1D)$	1. u	3567.78	28020.66	$4p^2P_2(^1D) - 4d^2F_3(^1D)$

TABLE 6 *Continued*

Int	λ Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination	Int	λ Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination
4	3562.19	28064.63	4p 2F_4 (1D) — 4d 2G_4 (1D)	3	3186.19	31376.40	4p 4P_2 (3P) — 5s 2D_3 (1D)
6	3561.04	28073.69	4p 2F_4 (1D) — 4d 2G_5 (1D)	1	3163.61	31600.34	4p 2P_1 (1D) — 5d 2P_2 (3P)
5	3556.91	28106.29	3d 2P_1 (3P) — 4p 2P_1 (1D)	4	3161.38	31622.63	4p 2S_1 (3P) — 4d 2D_2 (3P)
4	3550.03	28160.76	4p 2D_3 (3P) — 4d 4P_3 (3P)	4	3153.80	31698.63	4p 2P_1 (1D) — 5d 2P_1 (3P)
9	3545.84	28194.03	4p 2F_3 (1D) — 4d 2G_4 (1D)	2	3146.47	31772.48	4p 4P_3 (3P) — 4d 2F_4 (3P)
2	3531.22	28310.76	3d 4D_1 (3P) — 4p 4S_2 (3P)	4	3137.66	31861.68	4p 2D_3 (3P) — 4d 2P_2 (3P)
4	3521.98	28385.04	4p 4P_1 (3P) — 3d 2S_1 (1D)	000.u	3108.82	32157.25	4s 2P_2 (3P) — 4p 2F_3 (1D)
4	3490.89	28637.82	3d 2P_1 (3P) — 4p 2D_2 (1D)	5	3104.38	32203.24	4p 2P_2 (1D) — 5d 2P_2 (3P)
3	3487.33	28667.06	4p 4D_3 (3P) — 4d 4F_2 (3P)	3	3094.98	32301.04	4p 2P_2 (1D) — 5d 2P_1 (3P)
4	3478.24	28741.97	4p 4P_2 (3P) — 3d 2S_1 (1D)	8	3093.41	32317.43	4p 2P_2 (3P) — 4d 2D_3 (3P)
2	3471.59	28797.03	4p 4D_3 (3P) — 4d 4P_2 (3P)	5	3088.24	32371.53	4p 2P_2 (1D) — 5d 2D_3 (3P)
3	3465.80	28845.14	4p 2S_1 (3P) — 4d 2P_1 (3P)	4	3082.99	32426.66	4p 2P_1 (1D) — 4d 2S_1 (1D)
6	3464.14	28858.96	4p 2D_3 (3P) — 4d 2F_3 (3P)	6	3033.52	32955.44	4s 2P_1 (3P) — 4p 2P_2 (1D)
000.u	3438.14	29077.19	4p 4D_3 (3P) — 5s 2D_2 (1D)	6	3028.93	33005.38	4p 2P_1 (3P) — 4d 2D_2 (3P)
2	3432.64	29123.78	4p 2F_3 (1D) — 4d 2D_2 (1D)	4	3026.75	33029.15	4p 2P_2 (1D) — 4d 2S_1 (1D)
3	3429.64	29149.25	4p 2F_4 (1D) — 4d 2D_3 (1D)	5	3014.49	33163.47	4p 2D_2 (3P) — 4d 2D_3 (3P)
3	3414.46	29278.84	4p 2F_3 (1D) — 4d 2D_3 (1D)	5	3000.45	33318.65	4p 2D_2 (3P) — 4d 2D_2 (3P)
4	3397.89	29421.62	4p 4D_2 (3P) — 4d 2F_3 (3P)	6	2979.05	33557.99	4s 2P_1 (3P) — 4p 2P_1 (1D)
2.u	3379.48	29581.88	4p 2F_3 (1D) — 4d 2P_2 (1D)	5	2955.39	33826.63	4p 2D_3 (3P) — 4d 2D_3 (3P)
7	3376.46	29608.34	4p 2F_4 (1D) — 4d 2F_4 (1D)	8	2942.90	33970.18	4s 2P_2 (3P) — 4p 2P_2 (1D)
2.u	3373.87	29631.07	4p 2F_3 (1D) — 6s 2P_2 (3P)	2	2935.57	34055.00	4p 2F_4 (1D) — 5d 2D_3 (3P)
4	3365.54	29704.41	4p 2F_4 (1D) — 4d 2F_3 (1D)	4	2932.60	34089.49	4s 2P_1 (3P) — 4p 2D_2 (1D)
3	3361.73	29738.08	4p 2F_3 (1D) — 4d 2F_4 (1D)	4	2924.66	34182.30	4p 2F_3 (1D) — 5d 2D_3 (3P)
6	3350.94	29833.83	4p 2F_3 (1D) — 4d 2F_3 (1D)	5	2891.61	34572.70	4s 2P_2 (3P) — 4p 2P_1 (1D)
2	3341.77	29915.69	4p 4D_3 (3P) — 4d 2F_3 (3P)	4	2865.85	34883.44	4p 4P_1 (3P) — 4d 2P_2 (3P)
2	3269.05	30581.14	4p 4P_3 (3P) — 4d 4F_4 (3P)	2	2847.81	35104.41	4s 2P_2 (3P) — 4p 2D_2 (1D)
3	3222.42	31023.65	4p 2D_3 (1D) — 5d 2P_2 (3P)	2	2844.12	35149.95	4s 2P_2 (3P) — 4p 2D_3 (1D)
3	3221.64	31031.16	4p 4P_3 (3P) — 4d 4F_3 (3P)	00	2836.79	35240.77	4s 4P_3 (3P) — 4d 2P_3 (3P)
3	3217.70	31069.16	4p 2D_2 (1D) — 5d 2P_2 (3P)	3	2764.66	36160.15	4s 4P_3 (3P) — 4p 2F_3 (1D)
4	3207.61	31166.89	4p 2D_2 (1D) — 5d 2P_1 (3P)	1	2754.91	36288.12	4s 4P_2 (3P) — 4p 2F_4 (1D)
4	3205.03	31191.97	4p 2D_3 (1D) — 5d 2D_3 (3P)	4	2692.62	37127.55	4s 4P_2 (3P) — 4p 2P_2 (1D)

TABLE 6 (Continued)

Int	λ I. Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination	Int	λ I. Å	$\nu_{vac.}$	Termcombination
0. u	2649.62	37730.04	$4s^2P_2 (^3P) - 4p^2P_1 (^1D)$	2	2475.48	40384.00	$4p^2P_2 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$
3	2647.29	37763.25	$4p^4S_2 (^3P) - 6s^4P_3 (^3P)$	00	2463.03	40588.12	$4p^2D_2 (^3P) - 4d^2P_2 (^1D)$
00	2636.41	37919.08	$3d^4D_3 (^3P) - 4p^2F_3 (^1D)$	2	2459.97	40638.60	$4p^2D_2 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$
1	2627.41	38048.96	$3d^4D_3 (^3P) - 4p^2F_4 (^1D)$	000. u	2459.63	40644.22	$4p^4D_2 (^3P) - 6s^4P_3 (^3P)$
2	2624.63	38089.26	$4p^4S_2 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$	00	2447.77	40841.13	$4p^2D_2 (^3P) - 4d^2F_3 (^1D)$
0	2616.87	38202.20	$3d^4D_4 (^3P) - 4p^2F_4 (^1D)$	00	2443.24	40916.85	$4p^2P_1 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$
1	2570.01	38898.71	$4p^2P_2 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$	00	2441.33	40948.86	$4p^2D_3 (^3P) - 4d^2D_3 (^1D)$
00 u	2567.15	38942.04	$4p^2S_1 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$	1	2440.07	40970.00	$4p^4D_2 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$
3	2564.45	38983.04	$4p^4S_2 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$	2	2430.06	41138.76	$4p^4D_3 (^3P) - 6s^4P_3 (^3P)$
4	2562.12	39018.59	$3d^2D_3 (^3P) - 5p^2P_2 (^3P)$	1	2424.70	41229.69	$4p^2D_2 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$
2	2559.31	39061.32	$4p^4S_2 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$	3	2420.49	41301.39	$4p^2D_3 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$
2	2556.63	39102.26	$4p^2S_1 (^3P) - 6s^4P_1 (^3P)$	2	2414.26	41407.96	$4p^2D_3 (^3P) - 4d^2F_4 (^1D)?$
00	2553.44	39151.12	$4s^4P_3 (^3P) - 4p^2D_3 (^1D)$	2	2410.97	41464.46	$4p^4D_3 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$
4	2536.04	39419.72	$3d^2D_3 (^3P) - 5p^2D_2 (^3P)$	3	2404.40	41577.76	$4p^4D_4 (^3P) - 6s^4P_3 (^3P)$
1	2535.28	39431.53	$4p^2P_1 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$	1	2398.39	41681.93	$4p^4D_1 (^3P) - 6s^4P_1 (^3P)$
2	2528.71	39533.97	$4p^2S_1 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$	5	2387.96	41863.98	$4p^4D_2 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$
00. u	2526.15	39574.03	$4p^4S_2 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$	5	2383.50	41942.30	$4p^4D_2 (^3P) - 6s^4P_1 (^3P)$
2	2522.53	39630.82	$3d^2D_2 (^3P) - 5p^2P_2 (^3P)$	1	2369.28	42194.01	$4p^4D_1 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$
4	2516.81	39720.88	$4d^2D_2 (^3P) - 5p^2P_1 (^3P)$	5	2360.07	42358.65	$4p^4D_3 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$
3	2515.60	39739.99	$4p^2P_1 (^3P) - 4d^2P_1 (^1D)$	2	2354.79	42453.63	$4p^4D_2 (^3P) - 6s^2P_1 (^3P)$
0	2515.29	39744.89	$4p^2D_2 (^3P) - 6s^4P_2 (^3P)$	1	2317.77	43131.64	$4s^2D_3 (^1D) - 4p^2P_2 (^1S)$
0	2512.27	39792.66	$4p^2P_2 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$	3	2300.19	43461.26	$4p^4P_2 (^3P) - 6s^4P_3 (^3P)$
0. u	2507.34	39870.89	$4p^2P_2 (^3P) - 6s^4P_1 (^3P)$	3	2284.02	43768.92	$4p^4P_3 (^3P) - 6s^4P_3 (^3P)$
0	2501.86	39958.22	$3d^2F_3 (^3P) - 5p^2P_2 (^3P)$	4	2282.64	43795.37	$3d^2D_3 (^3P) - 5p^2F_4 (^1D)$
1	2499.55	39995.15	$4p^2P_2 (^3P) - 4d^2F_3 (^1D)$	2	2252.26	44386.06	$3d^2D_2 (^3P) - 5p^2F_3 (^1D)$
0	2497.25	40031.98	$3d^2D_2 (^3P) - 5p^2D_2 (^3P)$	5	2235.77	44713.39	$3d^2F_3 (^3P) - 5p^2F_3 (^1D)$
00	2495.95	40052.83	$4p^2D_2 (^3P) - 4d^2P_1 (^1D)$	1	2229.5	44839.13	$3d^2P_2 (^3P) - 5p^2D_2 (^3P)$
2	2482.17	40275.17	$4p^2P_1 (^3P) - 4d^2P_2 (^1D)$	2. u	2182.74	45799.59	$3d^2P_1 (^3P) - 5p^2D_2 (^3P)?$
2	2479.08	40325.36	$4p^2P_1 (^3P) - 6s^2P_2 (^3P)$	6	2171.41	46038.54	$3d^2P_2 (^3P) - 5p^2S_1 (^3P)$
00	2476.99	40359.39	$3d^2F_3 (^3P) - 5p^2D_2 (^3P)$	0	2127.1	46997.46	$3d^2P_1 (^3P) - 5p^2S_1 (^3P)$

TABLE 7.

Ar II-spectrum in the extreme violet.

Int.	$\lambda_{obs.}$	ν	Termcombination	$\lambda_{calc.}$
2	762.37	131170	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 3d\ ^4D_2\ (^3P)$	762.39
4	754.99	132452	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^4D_3\ (^3P)$	755.01
1	748.39	133620	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 4s\ ^4P_2\ (^3P)$	748.38
8 d.	745.22	134189	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^4P_3\ (^3P)$	745.11
			$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 4s\ ^4P_1\ (^3P)$	745.51
5	740.45	135053	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^4P_2\ (^3P)$	740.45
3	731.10	136780	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 4s\ ^2P_2\ (^3P)$	731.11
5	725.73	137792	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 4s\ ^2P_1\ (^3P)$	725.72
6	723.54	138209	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^2P_2\ (^3P)$	723.54
4	718.29	139219	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^2P_1\ (^3P)$	718.26
3	704.72	141900	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 3d\ ^4F_2\ (^3P)$	704.69
4	699.00	143062	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^4F_3\ (^3P)$	698.94
2	698.19	143227	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 3d\ ^2P_1\ (^3P)$	698.10
1	697.82	143303	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^4F_2\ (^3P)$	697.65
4	693.55	144186	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 3d\ ^2P_2\ (^3P)$	693.46
$1\frac{1}{2}$	691.29	144657	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2P_1\ (^3P)$	691.19
2	686.73	145618	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2P_2\ (^3P)$	686.64
6	679.59	147148	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 4s\ ^2D_2\ (^1D)$	679.55
0	673.13	148560	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^2D_2\ (^1D)$	673.01
6	672.03	148803	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^2D_3\ (^1D)$	672.00
6	671.21	148985	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 3d\ ^2D_2\ (^3P)$	671.09
5	666.23	150098	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2F_3\ (^3P)$	666.16
2	664.84	150412	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2D_2\ (^3P)$	664.71
6	662.11	151032	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2D_3\ (^3P)$	662.01
2	603.11	165817	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 4s\ ^2S_1\ (^1S)$	602.98
3	597.92	167246	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 4s\ ^2S_1\ (^1S)$	597.89
$1\frac{1}{2}$	584.53	171078	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2F_3\ (^1D)$	584.53
3	583.65	171335	$3p\ ^2P_1\ (^3P) - 3d\ ^2D_2\ (^1D)$	583.55
5	580.47	172264	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2D_3\ (^1D)$	580.38
$1\frac{1}{2}$	578.81	172768	$3p\ ^2P_2\ (^3P) - 3d\ ^2D_2\ (^1D)$	578.71

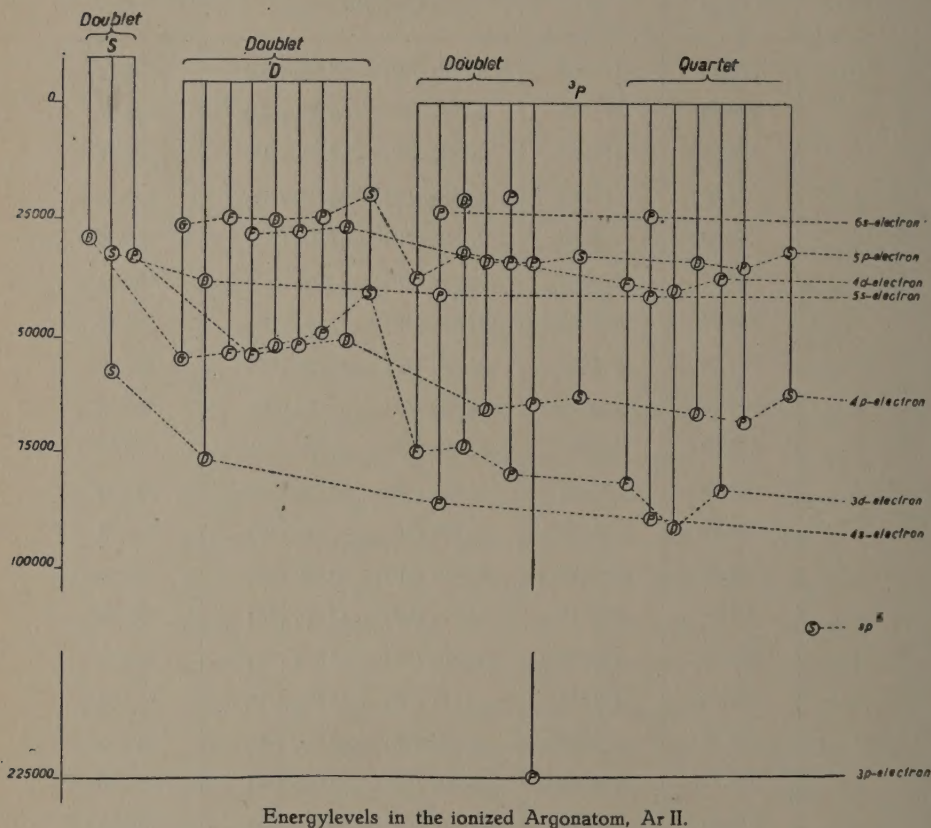
TABLE 7 (Continued).

Int.	$\lambda_{obs.}$	ν	Termcombination	$\lambda_{calc.}$
1 ^{1/2}	578.34	172909	3p ² P ₁ (³ P) — 3d ² P ₂ (¹ D)	578.22
2	576.93	173331	3p ² P ₁ (³ P) — 3d ² P ₁ (¹ D)	576.91
4	573.55	174353	3p ² P ₂ (³ P) — 3d ² P ₂ (¹ D)	573.47
1	572.20	174764	3p ² P ₂ (³ P) — 3d ² P ₁ (¹ D)	572.08
3	560.38	178450	3p ² P ₁ (³ P) — a ² P ₁	560.33
3	557.02	179530	3p ² P ₂ (³ P) — a ² P ₂	556.92
1	548.92	182176	3p ² P ₂ (³ P) — 5s ⁴ P ₂ (³ P)	548.88
4	547.54	182635	3p ² P ₁ (³ P) — 3d ² S ₁ (¹ D)	547.56
2	546.36	183038	3p ² P ₂ (³ P) — 5s ² P ₂ (³ P)	546.28
1	543.96	183837	3p ² P ₂ (³ P) — 5s ² P ₁ (³ P)	543.83
5	543.33	184050	3p ² P ₂ (³ P) — 3d ² S ₁ (¹ D)	543.30
1	537.18	186157	3p ² P ₂ (³ P) — 4d ⁴ P ₁ (³ P)	537.23
1	530.65	188448	3p ² P ₁ (³ P) — 4d ² P ₁ (³ P)	530.59
0	526.54	189919	3p ² P ₂ (³ P) — 4d ² P ₁ (³ P)	526.59
3	524.83	190538	3p ² P ₂ (³ P) — 4d ² P ₂ (³ P)	524.77
2	522.93	191231	3p ² P ₁ (³ P) — 4d ² D ₂ (³ P)	522.88
4	519.47	192504	3p ² P ₂ (³ P) — 4d ² D ₃ (³ P)	519.42
1	514.43	194390	3p ² P ₁ (³ P) — 3d ² D ₂ (¹ S)	514.40
3	510.68	195817	3p ² P ₂ (³ P) — 3d ² D ₃ (¹ S)	510.64
0	503.78	198499	3p ² P ₁ (³ P) — 4d ² P ₂ (¹ D)	503.73
0	502.20	199124	{ 3p ² P ₁ (³ P) — 6s ² P ₁ (³ P) 3p ² P ₂ (³ P) — 6s ⁴ P ₂ (³ P)	{ 502.11 502.26
2	490.76	203766	3p ² P ₁ (³ P) — 4d ² S ₁ (¹ D)	490.73
0	489.26	204390	3p ² P ₂ (³ P) — 5d ² P ₂ (³ P)	489.27
2. d	488.88	204549	{ 3p ² P ₂ (³ P) — 5d ² P ₁ (³ P) 3p ² P ₂ (³ P) — 5d ² D ₃ (³ P)	{ 489.04 488.88
2	487.27	205225	3p ² P ₂ (³ P) — 4d ² S ₁ (¹ D)	487.30

Only the lines :

4	678.17	147456	
5	676.48	147824	
4	612.59	163241	of the extreme violet spectrum find no explanation.

simplicity the fine structure of the levels (splitting according the inner quantum numbers j) is not given.



Energylevels in the ionized Argonatom, Ar II.

4. Summary.

The analysis of the Ar. II spectrum has been extended by the detection of a large number new levels, which belong to three term systems corresponding with the 3P , 1D and 1S of the ion Ar^{++} . A list of 360 new classified lines have been added to the list of 180 lines already classified. The Ar. II-spectrum shows very interesting data for the theory of the series limits and inverted and not inverted terms.

In conclusion the author wishes to express thanks to Prof. P. ZEEMAN for valuable advice and suggestions.

Laboratory "Physica" of the University of Amsterdam.

February 18, 1930.